Lista 7

MAT5734/MAT0501 — 2° SEMESTRE DE 2017

Parte I. Anéis semi-simples

Exercício 1.
Mostre que o centro de um anel simples é um corpo, e que o centro de um anel semi-simples é um produto finito de corpos.

Exercício 2.
Mostre que para um anel Booleano, as seguintes condições são equivalentes

(a) R é Artiniano;

(b) R é Noetheriano;

(c) R é semi-simples;

(d) R é finito.

Exercício 3.
Seja R um anel. Mostre que R é semi-simples se, e somente se, $M_n(R)$ é semi-simples.

Exercício 4.
Explique quando $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ é um anel semi-simple.

Exercício 5.
Qualquer subanel de um anel semi-simples é semi-simples?

Exercício 6.
Seja R um domínio. Se $M_n(R)$ é semi-simple, mostre que R é anel com divição.

Exercício 7.
Seja M um R-módulo finitamente gerado e $E = \mathrm{End}_R(M)$. Mostre que se R é semi-simples (resp. artiniano e simples), assim E é também.

Exercício 8.
Sejam R, S os anéis tais que $M_m(R) \cong M_n(S)$. Assim $m = n$ e $R \cong S$?

Exercício 9.
Seja I um ideal num anel semi-simples. Encontre idempotente central $e \in R$, tal que $I = Ie = eI$.

Exercício 10.
Sejam I_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ os ideais num anel R, e $I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. Se todo R/I_i é semi-simples, mostre que R/I é semi-simple.

Parte II. Radical de Jacobson

Exercício 11.
Calcule $J(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercício 12.
Verefique que $M_n(J(R)) = J(M_n(R))$.

Exercício 13.
Mostre que $J(R)$ não contem idempotentes não-nulos. Calcule $J(M_n(R))$ para anel arbitrário, e $J(B)$ para anel Booleano B.

Exercício 14.
Para um corpo F. Considere

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}.$$

Mostre que R é comutativo e calcule $J(R)$.

Exercício 15.
Seja $\mathcal{S}$ um conjunto parcialmente ordenado finito, e $n = |\mathcal{S}|$. Fixe corpo F, e considere

$$R_{\mathcal{S}} = \{(a_{ij}) \in M_n(F) \mid i \not\preceq j \Rightarrow a_{ij} = 0\},$$

com $\preceq$ é ordem parcial em $\mathcal{S}$. Calcule $J(R_{\mathcal{S}})$.

Exercício 16.
Seja R um domínio. Mostre que $J(R[x]) = 0$.

Exercício 17.
Seja R um anel comutativo. Mostre que

$$J(R[x]) = N(R[x]),$$

onde $N(R[x])$ é nilradical do $R[x]$ (Veja Lista 1, Ex.28).

Exercício 18.
Se $a \in R$ e $a \in J(R[x])$, mostre que a é nilpotente.

Exercício 19.
Mostre que se $f : R \to S$ é homomorfismo sobrejetor entre anéis, assim $f(J(R)) \subseteq J(S)$. Encontre exemplo tal que $f(J(R))$ é menor do que $J(S)$.

Encontre dois anéis R, S e homomorfismo $f : R \to S$, tais que $f(J(R)) \nsubseteq J(S)$.

Exercício 20.
Mostre que $J(C[0,1]) = 0$, e, mais geral, $J(C(X)) = 0$ para todo espaço topológico X.

Exercício 21.
O **socle** $\mathrm{soc}(M)$ de um R-módulo é definido como soma de todos módulo simples de M. Mostre que

$$\mathrm{soc}(M) \subseteq \{m \in M \mid J(R) \cdot m = 0\},$$

com igualdade no caso $R/J(R)$ é um anel artiniano.

Exercício 22.
Mostre que

$$J(R_1 \times \cdots \times R_n) = J(R_1) \times \cdots \times J(R_n).$$

Exercício 23.
Seja $R = M_5(\mathbb{Z}) \times M_3(\mathbb{Z}_8) \times M_4(\mathbb{Z}_3)$. Calcule $J(R)$.

Exercício 24.
Seja $f : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Se $R/J(R)$ é semisimples, mostre que $J(f(R)) = f(J(R))$.

Exercício 25.
Para qualquer anel R, definamos o **radical de Brown-McCoy** $\mathfrak{r}(R)$ como intersecção de todos os ideais maximais (bilaterais!) de R. Mostre que $J(R) \subset \mathfrak{r}(R)$

Exercício 26.
Seja R anel Artiniano à esquerda. Mostre que $J(R) = \mathfrak{r}(R)$.