Prova 2 gabaritos

MAT3210 — 2° SEMESTRE DE 2017

Exercício 1.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(3x+2y)^3}{3x^2+2y^2}$,

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Solução 1.
(a) Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3y\frac{x^2}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3x\frac{y^2}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{y^2}{x^2+y^2} = 0.\end{aligned}$$

pois as funções $\frac{x^2}{x^2+y^2}, \frac{y^2}{x^2+y^2}$ são limitadas, e $x\to 0$, $y\to 0$.

(b) Se $y = x^2$, temos

$$\lim_{(x)\to(0)} \frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, se $x = 0$ e $y \to 0$, a função está tendendo a 0. Assim o limite não existe.

(c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(3x+2y)^3}{3x^2+2y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(3x+2y)^3}{3x^2+2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(3x)^3+3(3x)^2(2y)+3(3x)(2y)^2+(2y)^3}{3x^2+2y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 9x\frac{3x^2}{3x^2+2y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} 18y\frac{3x^2}{3x^2+2y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} 18x\frac{2y^2}{3x^2+2y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4y\frac{2y^2}{3x^2+2y^2} = 0.$$

pois as funções $\frac{x^2}{x^2+y^2}, \frac{y^2}{x^2+y^2}$ são limitadas, e $x\to 0$, $y\to 0$.

(d) Se $x = y^2$, temos

$$\lim_{(y)\to(0)} \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, se $x = 0$, $y \to 0$, a função está tendendo a 0. Assim o limite não existe.

Exercício 2.

(a) Calcule aproximadamente

$$\sqrt[4]{16,01} + \sqrt{3,98}.$$

(b) Calcule aproximadamente

$$\ln(1,01^3) + \sqrt{1,01 + 3,02}.$$

Solução 2.

(a) Considere a função $f(x, y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt{y}$. Temos que

$$f(16 + 0.01, 4 - 0.02) = \sqrt[4]{16,01} + \sqrt{3,98}.$$

Por outro lado

$$f(16 + 0.01, 4 - 0.02) \approx f(16, 4) + \frac{\partial f}{\partial x}(16, 4) \cdot 0.01 + \frac{\partial f}{\partial y}(16, 4) \cdot (-0.02).$$

Fácil ver que $f(16, 4) = 4$. Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}.$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(16, 4) = \frac{1}{32}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(16, 4) = \frac{1}{4}.$$

Portanto

$$f(16 + 0.01, 4 - 0.02) \approx 4 + \frac{1}{32}\frac{1}{100} - \frac{1}{4}\frac{2}{100}.$$

(b) Considere a função $f(x, y) = \ln(x^3) + \sqrt{x + y}$. Temos que

$$f(1 + 0.01, 3 + 0.02) = \ln 1.01^3 + \sqrt{1.01 + 3.02}.$$

Por outro lado

$$f(1 + 0.01, 3 + 0.02) \approx f(1, 3) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 3) \cdot 0.01 + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 3) \cdot (0.02).$$

Fácil ver que $f(1, 3) = 2$. Temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{2}(x + y)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^{-\frac{1}{2}}.$$

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 3) = \frac{13}{4}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 3) = \frac{1}{4}.$$

Portanto

$$f(1 + 0.01, 3 + 0.02) \approx 2 + \frac{13}{4}\frac{1}{100} + \frac{1}{4}\frac{2}{100} = \frac{163}{80}.$$

Exercício 3.

(a) Determine o plano que passa por $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$ e é tangente ao gráfico de $f(x,y)=x^3y$.

(b) Determine o plano que passa por $(1,1,1)$ e $(0,1,0)$ e é tangente ao gráfico de $f(x,y)=y^3x$.

Solução 3.
(a) O plano tangente no ponto genérico $P=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ tem forma

$$z-x_0^3y_0=3x_0^2y_0(x-x_0)+x_0^3(y-y_0).$$

Como $A=(1,0,1)$ e $B=(1,1,0)$ estão no plano, temos

$$\begin{aligned}1-x_0^3y_0&=3x_0^2y_0(1-x_0)+x_0^3(0-y_0),\\ 0-x_0^3y_0&=3x_0^2y_0(1-x_0)+x_0^3(1-y_0).\end{aligned}$$

Temos que $x_0^3=-1$, assim $x_0=-1$. Neste caso $y_0=1/6$. Assim:

$$z+1/6=1/2(x+1)-(y-1/6).$$

é equação que contem pontos A e B.

(b) O plano tangente no ponto genérico $P=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ tem forma

$$z-y_0^3x_0=y_0^3(x-x_0)+3y_0^2x_0(y-y_0).$$

Como $A=(1,1,1)$ e $B=(0,1,0)$ estão no plano, temos

$$\begin{aligned}1-y_0^3x_0&=y_0^3(1-x_0)+3y_0^2x_0(1-y_0),\\ 0-y_0^3x_0&=y_0^3(0-x_0)+3y_0^2x_0(1-y_0).\end{aligned}$$

Temos que $y_0^3=1$, assim $y_0=1$. Neste caso q.q. x_0 satisfaz o sistema. Assim temos:

$$z-x_0=(x-x_0)+3x_0(y-y_0);$$

equação tangente que contém ambos os pontos A e B.

Exercício 4.
Dada a função $f(x,y)=x\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2+y^2})$, determine:

a) O domínio das funções derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$;

b) Os pontos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ nos quais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas;

c) Os pontos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ nos quais f é diferenciável.

Solução 4.
(a) Se $(x, y) \neq (0,0)$, assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right) + \frac{2x^2\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{3\,(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{3\,(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Caso $(x, y) = (0,0)$ consideramos separadamente. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}(x^{2/3})}{x} = \lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x^{2/3}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0$$

Assim $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são definidos para todos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right) + \dfrac{2x^2\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{3\,(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}, & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{3\,(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}}, & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(b) Claramente as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas para todos $(x, y) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$. Caso $(x, y) = (0,0)$ consideramos separadamente.

Observe que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}} = 0,$$

pois função $\dfrac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$ é limitada. Na mesma maneira

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)}} = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)}} = 0$$

Assim

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)}} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)}} = 0.$$

Assim

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right) + \frac{2x^2\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{3\,(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \right] = 0+0=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{2xy\cos\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}{3\,(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \right] = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Portanto $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas para todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas para todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, assim f é diferenciável para todos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 5.

(a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$ para todo $t \neq 0$, e $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que

$$(1,1)\cdot\nabla f(1,1) = 2f(1,1).$$

(b) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que $f(tx,ty) = t^3 f(x,y)$ para todo $t \neq 0$ e $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que

$$(1,2)\cdot\nabla f(1,2) = 3f(1,2).$$

Solução 5.
(a) Seja $\gamma(t) = (t,t)$ curva em $\mathbb{R}^2$. Considere a função composta $F(t) = f(\gamma(t)) = f(t,t)$. Em particular $F(1) = f(1,1)$. Como f é diferenciável, temos que

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$$

Se $t = 1$, assim $\gamma'(1) = \gamma(1) = (1,1)$. Por outro lado $F(t) = f(t,t) = f(t\cdot 1, t\cdot 1) = t^2 f(1,1)$. Assim $F'(1) = 2f(1,1)$. Assim

$$(1,1)\cdot\nabla f(1,1) = 2f(1,1).$$

(b) Seja $\gamma(t) = (t,2t)$ curva em $\mathbb{R}^2$. Considere a função composta $F(t) = f(\gamma(t)) = f(t,2t)$. Em particular $F(1) = f(1,2)$. Como f é diferenciável, temos que

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$$

Se $t = 1$, assim $\gamma'(1) = \gamma(1) = (1,2)$. Por outro lado $F(t) = f(t,2t) = f(t\cdot 1, t\cdot 2) = t^3 f(1,2)$. Assim $F'(1) = 3f(1,2)$. Assim

$$(1,2)\cdot\nabla f(1,2) = 3f(1,2).$$