

Cálculo II — Lista 5.

1) Determine os pontos críticos das funções dadas e classifique-os, decidindo se são pontos de máximo local, de mínimo local ou de sela:

(a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$;

(b) $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$;

(c) $g(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$;

(d) $g(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$;

(e) $f(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + xy$, com $x > 0$ e $y > 0$.

2) Estude as seguintes funções quanto aos extremos globais:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 2y$

(b) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$

(c) $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y$

3) Seja $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ uma função que representa uma distribuição de temperatura no plano. Considere a região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 4\}$. Determine o ponto do conjunto D onde a temperatura é a menor possível.

4) Estude a função $f(x, y)$ quanto a máximos e mínimos na região D

(a) $f(x, y) = xy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 5\}$;

(b) $f(x, y) = 2x + y$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$;

(c) $f(x, y) = 3x + y$, com $x^2 + 2y^2 = 1$.

(d) $f(x, y) = xy$, com $x^2 + 4y^2 = 8$.

(e) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, com $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

(f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, na região triangular de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

(g) $f(x, y) = e^{x^2+y^2+y}$; $|x| \leq 1$; $|y| \leq 1$.

5) (a) Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.

(b) Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

(c) Considere a curva C dada pela intersecção do cilindro de equação $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ com o plano $2x + y + z = 12$. Determine as distâncias máximas e mínimas dos pontos de C ao plano $z = 0$.

(d) Considere a reta dada por intersecção dos planos

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

Determine o ponto dessa reta que se encontra mais próximo da origem.

6) Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, das funções relacionadas sujeitas ao respectivo vínculo indicado:

- (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 4$;
- (b) $f(x, y) = xy$, $4x^2 + 9y^2 = 36$;
- (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $3x + 2y + z = 6$;
- (d) $f(x, y, z) = x + y + z$, $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$;
- (e) $f(x, y, z) = xyz$, $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$.

7) Estude a função dada quanto a máximos e mínimos, sujeita às duas condições dadas:

- (a) $f(x, y, z) = x + y + z$, com $x^2 + y^2 = 1$ e $4x + 4y - z^2 = 0$.
- (b) $f(x, y, z) = x - y$, com $x^2 + z^2 - y = 0$ e $y = 2z$.
- (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, com $x + y + z = 1$ e $x + 2y + 3z = 6$.

8) Suponha que a temperatura em um ponto (x, y) de uma placa de metal seja $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Uma formiga, andando sobre a placa, percorre um círculo de raio 5 centrado na origem. Qual é a maior e a menor temperatura encontrada pela formiga?