

Cálculo II — Lista 3.

1) Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

a) $f(x, y) = 7xy^3 - 2x^3 + 8y^2 - \frac{1}{4}$

b) $f(x, y) = \operatorname{tg}(xy) - \frac{1}{xy}$

c) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^4) + 3x$

d) $f(x, y) = e^{3x^2+y^3} - 7x + \frac{1}{x+2y}$

e) $f(x, y) = x\sqrt{3x^2y + 7y^3}$

f) $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2 + 2)$

g) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

h) $f(x, y) = \frac{x^3 - 2y}{x^2 - 4y}$

i) $f(x, y) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

j) $f(x, y) = \ln(xy^3 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2})$

2) Determine o conjunto dos pontos em que as funções admitem derivadas parciais:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4(x+1)^3}{(x+1)^2 + y^2} + 5x, & \text{se } (x, y) \neq (-1, 0) \\ -5, & \text{se } (x, y) = (-1, 0) \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3) Seja $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $h(4) = 3$ e $h'(4) = -1$.

Considere $f(x, y) = xh(3x^2 + y^3)$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

4) a) Seja $z = x \operatorname{sen} \frac{x}{y}$. Verifique que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

b) Seja $f(x, y) = x^3y - y^3x$. Procure

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}},$$

em ponto $(1, 2)$.

5) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, sendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y^4}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6) Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável.

a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

c)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

d)

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

7) Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

a) $z = 2x^2y$, no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

c) $z = e^x \ln(y)$, no ponto $(3, 1, 0)$.

b) $z = xe^{x^2-y^2}$, no ponto $(2, 2, f(2, 2))$.

d) $z = \arctan(x - 2y)$, no ponto $(2, \frac{1}{2}, f(1, \frac{1}{2}))$.

8) Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.

9) Determine o plano que passa por $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.

10) Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e que contenham a intersecção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.

11) Calcule os valores aproximados das:

a) $\sqrt{1.01} + \sqrt[3]{7.9}$.

c) $\sqrt{0.98^2 + 1.01^2 + 2.03^2}$.

b) $1.04^{2.02}$.

d) $e^{1.01^2 - 1.002^2}$.

12) Calcule as derivadas mencionadas pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

a) $z = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, $\frac{dz}{dt} = ?$.

b) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$, $\frac{dz}{dt} = ?$.

c) $z = x^2y - y^2x$, $x = u \sin t$, $y = u \cos t$, $\frac{\partial z}{\partial t} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$.

d) $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$, $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$.

13) Seja $z = f(u - v, v - u)$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

14) Suponha que para todo t , $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.