Aula 2 | PM

(II) Introdução ao teoria das representações das álgebras com dim $< \infty$.

Plano:

(a) Algebras, suas radicais. Algebras basicas.
(b) Representações das algebras e aljavas.
(c) Aljava do Gabriel.

(a) Seja $k = \bar{k}$ corpo alg. fechado $(k = \mathbb{C})$.
A – uma algebra de dimensão finito sobre k, i.e. A é espaço vetorial
A é anel com 1.

Exemplos 1) $A = k$
2) $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ — dim ∞
3) $A = k[x]/x^2 = \{ a + bx \mid a, b \in k,\ x^2 = 0 \}$
algebra dos numeros duais.
4) $A = M_n(k)$, $A = U_n(k) = \left\{ \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \right\} \subset M_n(k)$
5) $A = k\langle x_1, x_2 \rangle$ – algebra livre, dim ∞.

O radical de Jacobson da A e pelo definição
$\overset{def}{=} \bigcap$ ideas maximais à direita em A
$\overset{Ex}{=} \bigcap$ ideais maximais à esquerda em A
$\overset{Ex}{=} \bigcap$ todos ideais maximais em A
$\Rightarrow J(A)$ ideal bilateral
A chama-se simples se A não possui ideais proprios
A chama-se semi-simple se $J(A) = 0$.

<u>Exemplos</u>

$\cdot)$ $A = M_n(k)$ simples $\Rightarrow J(A) = 0$
é s.s.

$\cdot\cdot)$ $A = U_2(k) = \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $J(A) = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
não é s.s.

$\cdot\cdot\cdot)$ $A = \bigoplus_{i \in I} M_{n_i}(k)$ - algebra s.s.

<u>Exercicios</u>: Seja G um grupo finito.

(1) $k[G] = \{f : G \to k\}$ - é uma k-algebra com $\dim = |G|$

Mostre que $k[G]$ é s.s.

(2) Seja $f : A \twoheadrightarrow B$ homomorfismo sobrejetivo das algebras, $f(J(A)) \subseteq J(B)$

<u>Teorema</u> (Wedderburn - Artin)

$$A/_{J(A)} \simeq M_{d_1}(k) \oplus \ldots \oplus M_{d_n}(k) \qquad (*)$$

Assim q.q. algebra semi-simple tem a forma $(*)$

<u>Def.</u> A chama se <u>basica</u> se todos d_i em $(*)$ são 1.

Assim

A é basica $\Leftrightarrow$ $A/_{J(A)} \simeq \prod_{i=1}^{n} k$

<u>Exemplos</u>

1) $A = M_n(k)$ é basica $\Leftrightarrow$ $n = 1$

2) $A = k[x]/x^2$ – numeros duais.

$J(x) = \langle x \rangle$, pois $\langle x \rangle$ é unico ideal maximal.

Assim $A/J(A) \simeq k$ é basica.

3) Mesmo para $A = k[x]/x^m$

$J(A) = \langle x \rangle$ tem dimensão $m-1$.

$\Rightarrow$ $A/J(A) \simeq k$ basica.

4) $A = U_2(k)$, $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $A/J(A) \simeq k \oplus k$ é basica.

5) $A = \begin{pmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$, $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $A/J(A) \simeq M_2(k) \oplus k$

$\Rightarrow$ A não é basica.

6) $A = \begin{pmatrix} k & k[x]/x^2 \\ 0 & k[x]/x^2 \end{pmatrix}$, $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & k[x]/x^2 \\ 0 & x \cdot k[x]/x^2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $A/J(A) \simeq k \oplus k$ $\Rightarrow$ A é basica.

(B) Uma <u>representação</u> da A é espaço vetorial (dim $< \infty$) V com homomorfismo das algebras

$$\rho : A \to \mathrm{End}(V)$$

<u>Obs.</u> Representações $=$ A-modulos.

Exemplos 1) $V=0$, $\rho=0$ — representação trivial.

2) $V=A$, $\rho: A \to \mathrm{End}(A)$ ← representação regular.

$$a \mapsto (b \mapsto ab)$$

3) $A=k$. Q.q. representação de A é espaço vetorial $V \cong k^n$, onde A age pela multiplicação dos vetores por escalares.

Def. Dadas 2 representações (V,ρ) e (V',ρ') de A, um morfismo é aplicação linear $\varphi: V \to V'$, tal que a seguinte diagrama é comutativa:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(a)"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ V' \arrow[r, "\rho'(a)"] & V' \end{tikzcd}$$

para todos $a \in A$.

Isto é

$$\varphi\,\rho(a) = \rho'(a)\,\varphi$$

Deste modo podemos formar uma categoria:

rep A: Objetos: representações de A

Morfismos: morfismos entre reps.

Teorema 1 Para q.q. algebra A de dimensão finito existe algebra basica B tal que rep A é equivalente ao rep B

(A, B Morita equivalentes).

Moralmente:

Classificar as representações da A $=$ Classificar as representações da algebra B (basica) associada.,

---

Lembrete: Uma Aljava é um grafo orientado

$$Q = (Q_0, Q_1)$$

Q_0 — Conjunto finito dos vertices; Q_1 — conjunto finito das flechas.

Uma Representação é coleção dos

Espaços vetoriais em vertices $i \in Q_0$

Transformações lineares pr flechas $\alpha: i \to j \in Q_1$

Dado $Q \longmapsto kQ$ — k-algebra associativa de caminhos em Q.

(construimos)

Base de kQ $=$ caminhos orientados em Q

Multiplicação em kQ — é contatenação dos caminhos em Q.

Exemplo Seja $Q: 1 \xrightarrow{\alpha} 2$

Base: p_1, p_2 — caminhos nulos em vertices

α — caminho de comprimento 1

Produto

	p_1	p_2	α
p_1	p_1	0	α
p_2	0	p_2	0
α	0	α	0

Se: $p_1 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ temos isomorfismo

$$kQ \simeq \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Obs:

kQ tem dimensão finita $\Leftrightarrow$ Q não tem os ciclicos orientados.

Exemplo 2 Q: $\circlearrowleft_{\alpha}$, assim $kQ = k[x]$.

Exercicio: Mostre que $J(kQ)$ é gerado pelos caminhos de comprimento 1 = flechas em Q, caso Q aciclico.

Assim: $kQ/J(kQ) \simeq \prod\limits_{i \in Q_0} k \Rightarrow kQ$ é algebra basica

Teorema Seja Q uma aljava. Assim existe isomorfismo das categorias $\operatorname{rep} Q \simeq \operatorname{rep}(kQ)$

Isto é:

"Estudar" representações da aljava Q $=$ "Estudar" representações da algebra kQ.

(c) Aljava do Gabriel.

Vimos:

aljava aciclica $Q \longmapsto$ algebra basica kQ

Agora seja A uma algebra basica.
Nós vamos ver como construir a aljava associada.

Lembrete Elemento $e \in A$ chama-se idempotente

1) se $e^2 = e$

2) Dois idempotentes $(e, f \in A)$ são ortogonais se
$$ef = fe = 0$$

3) Idempotente e chama-se primitivo se
impossivel escrever e como:
$$e = e_1 + e_2, \text{ com } e_1 \neq 0 \text{ e } e_2 \neq 0.$$

Agora fixamos $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o conjunto completo dos idempotentes primitivos ortogonais em A (i.e. $e_1 + e_2 + \ldots + e_n = 1$).

Aljava do Gabriel Q_A da A dado como:

vertices em Q_A $=$ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

flechas entre e_i e e_j $=$ Base no espaço $e_i \frac{J(A)}{J^2(A)} e_j$

Prop. Q_A não depende da escolha do $\{e_1, \dots, e_n\}$ em A.

Exemplos:

1) Seja $A = k[x]/x^n$.

Assim $e = 1$ unico idempotente $\Rightarrow$ Q_A tem 1 vertice.

$J(A) = \langle x \rangle$, $J^2(A) = \langle x^2 \rangle$

$\Rightarrow$ $\dim e \, J(A)/J^2(A) \, e = 1$.

$\Rightarrow$ Q_A:
$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

2) $A = \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Q_A tem 2 vertices.

$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J(A)/J^2(A) \simeq k$. $\Rightarrow$ Q_A tem 1 flecha.

$$\dim e_i \, J(A)/J^2(A) \, e_j = \begin{cases} 1, & i = 1,\ j = 2 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Assim Q_A:
$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r, "\alpha"] & \underset{2}{\bullet} \end{tikzcd}$$

3) $A = \begin{pmatrix} k & k[x]/x^2 \\ 0 & k[x]/x^2 \end{pmatrix}$, $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & k[x]/x^2 \\ 0 & x\,k[x]/x^2 \end{pmatrix}$, $J^2(A) = \begin{pmatrix} 0 & x\,k[x]/x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $J(A)/J^2(A)$ tem dimensão 2 $\Rightarrow$ Q_A tem 2 flechas

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Q_A tem 2 vertices

$$\dim e_i \, J(A)/J^2(A) \, e_j = \begin{cases} 1, & (i,j) = (1,2),\ (i,j) = (2,2) \\ 0, & \text{caso contrarios.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Assim Q_A:

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r] & \underset{2}{\bullet} \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

<u>Teorema</u> Seja A uma algebra basica de dim $< \infty$. Existe ideal (admissivel) em kQ_A tal que:

$$A \simeq kQ_A / I.$$

<u>Resumindo</u> (tudo):

Dada q.q. algebra A da dimensão finita. Existe algebra basica B tal que:

$$\text{rep}\, A \simeq \text{rep}\, B \simeq \text{rep}\, kQ_B/I \simeq \text{rep}(Q, I)$$

representações da aljava Q que "satisfazem" relações I.