Representasões das aljavas e Teorema do Gabriel

Plano:

① Representasões das aljavas:

- Definisões e Fatos basicos,
- Aljavas com "numero finito" das representasões

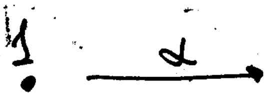
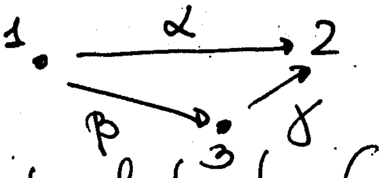
② Representasões das algebras com dimensão finita

- K-algebras, radicais, algebras basicas
- algebra de caminhos da aljava dada
- aljava do Gabriel da algebra dada.

---

① Aljavas e suas representasões

Uma aljava é um grafo orientado: Formalmente aljava Q é $Q=(\underset{\text{conjunto finito dos vertices}}{Q_0},\ \underset{\text{conjunto finito das flechas}}{Q_1})$, onde

Ex. Q:  , Q: 

Seja $K=\bar{K}$ um corpo algebricamente fechado $(k=\mathbb{C})$.

Uma representasão do Q é colesão dos:

- Espasos vetoriais (para todos vertices).
- Transformasões lineares (para todas as flechas) para espasos corespondentes

Formalmente uma representação é coleção

$$V = \left((V_i)_{i \in Q_0};\ \left(V_\alpha : V_i \longrightarrow V_j \right)_{\alpha : i \to j \in Q_1} \right)$$

espaços vetoriais

transform. lineares entre espaços.

Dimensão do V é vetor $\dim V = (\dim V_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$

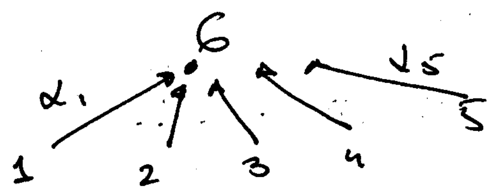
Exemplos: Caso Q: $\overset{1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha} \overset{2}{\bullet}$, assim q.q.

(a) representação tem forma $V_1 \xrightarrow{V_\alpha} V_2$, isto é dois espaços vetoriais e uma transformação $V_\alpha \in L(V_1, V_2)$.

(b) Q:

, q.q. representação é um espaço vetorial V_1 e transformação linear: $V_\alpha : V_1 \to V_1$.

(c)



Assim q.q. representação é
6 espaços vetoriais $V_1, \dots, V_6$, e
5 transf. lineares $V_{\alpha_i} : V_i \to V_6$, $i=1,$

//

Se V e W dois representações definimos o morfismo $\varphi : V \longrightarrow W$ como coleção dos transformações lineares $\{\varphi_x : V_x \longrightarrow W_x\}_{x \in Q_0}$ tal que a diagrama

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "V_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & V_j \arrow[d, "\varphi_j"] \\ W_i \arrow[r, "W_\alpha"] & W_j \end{tikzcd}$$

é comutativa p/ todo $\alpha : i \to j \in Q_1$, i.e. $\varphi_j V_\alpha = W_\alpha \varphi_i$.

Morfismo $\varphi : V \to W$ chama-se isomorfismo se todas φ_i são invertiveis

Com: Objetos = representações de Q

Morfismos = morfismos entre representações

temos $\mathrm{Rep}_k Q$ – é uma categoria (abeliana).

$\boxed{\text{Problema}}$ Classificar todas as representações da aljava Q a menos o isomorfismo.

Exemplo 1 $Q: 1 \xrightarrow{\alpha} 2$. $V_1 \xrightarrow{V_\alpha} V_2$

Podemos fazer escolha das bases em V_1 e V_2 tal que a matriz V_α tem forma:

$$\begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$ com I_d – identidade e d = posto do V_α.

Assim:

Dois representações $V_\alpha: V_1 \to V_2$, e $W_\alpha: W_1 \to W_2$ são isomorfas $\Longleftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\dim V_1 = \dim V_2 \\ \dim W_1 = \dim W_1\end{array}\right\} \underline{\dim} V = \underline{\dim} W$, posto V_α = posto W_α

Exemplo 2 $Q: \bullet \overset{\alpha}{\circlearrowleft}$ Como $V_\alpha: V_1 \to V_1$, assim existe escolha da base em V_1, t.q. matriz do V_α é

$$V_\alpha = \begin{bmatrix} J_{n_1,\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2,\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & J_{n_k,\lambda_k} \end{bmatrix}, \quad J_{n,\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in M_n(k)$$

forma do Jordan do V_α

Blocko de Jordan.

Dois representações

$V_\alpha : V_1 \to V_1$ e

$W_\alpha : W_1 \to W_1$

são isomorfas $\Longleftrightarrow$ V_α e W_α tem a mesma forma de Jordan.

Ex.3 Caso $Q: \circlearrowleft \bullet \circlearrowright$

Classificar todas representações do Q $=$ Classificar 2 operadores num espaço vetorial

"Sem esperança", "Impossivel", "selvagem".

Def. Caso V, W dois representações (de Q) definimos

(1) $V \oplus W$ como: $(V \oplus W)_i := V_i \oplus W_i$, $i \in Q_0$ e

$\uparrow$ soma direta

$$(V \oplus W)_\alpha := \begin{bmatrix} V_\alpha & 0 \\ 0 & W_\alpha \end{bmatrix} : V_i \oplus W_i \to V_j \oplus W_j, \quad \alpha : i \to j \in Q_1$$

(2) Representação V chama-se indecomponivel caso $V \neq V' \oplus V''$ com V', V'' representações $\neq 0$.

Teorema (Krull-Schmidt)

Qualquer representação V de Q decomponha-se como soma direta dos representações indecompon. e na maneira unica a menos isomorfismo e permutação dos termos.

$\boxed{\text{Problema}^*}$ Classificar todas representações indecomponiveis da aljava Q.

Exemplo1 Seja $Q: 1 \xrightarrow{\alpha} 2$, assim todos indecomponiveis são:

Finito

$S_1: \mathbb{C} \longrightarrow 0$

$S_2: 0 \longrightarrow \mathbb{C}$,

$S_3: \mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C}$

e qualquer representação V é isomorfo ao

$$V \simeq S_1^{d_1-d} \oplus S_2^{d_2-d} \oplus S_3^{d}, \text{ com}$$

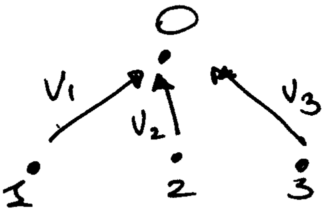
$d_1 = \dim V_1$, $d_2 = \dim V_2$, $d =$ posto V_α

Infinito

Exemplo 2 Q:

Indecomponiveis = Blocos de Jordan

Exemplo 3



Sejam $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, V_{\alpha_3}$ injetoras assim representação de Q

Finito

é mesmo que coleção dos subespaços $(V_0; V_1, V_2, V_3)$, com $V_i \subset V_0$

Existe 8 - indecomponiveis com $\dim V_0 = 1$

1- indecomponivel com $\dim V_0 = 2$

$(\mathbb{C}^2; \mathbb{C}\langle 1,0\rangle, \mathbb{C}\langle 0,1\rangle, \mathbb{C}\langle 1,1\rangle)$.

Def. Aljava Q tem <u>tipo finito</u> se existe somente numero finito dos indecomponiveis representações (a menos isomorfismo).

Objetivo: Classificar aljavas que tem tipo finito

Definimos: $q_Q : \mathbb{Z}^{Q_0} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$(d_i)_{i\in Q_0} \longmapsto \sum_{i\in Q_0} d_i^2 - \sum_{\alpha: i\to j \in Q_1} d_i d_j$$

Ex. $Q: 1 \to 2$. $q_Q(d_1,d_2) = d_1^2 + d_2^2 - d_1 d_2$

Lembrete: Forma quadratica $q_Q : \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$ é positivamente definida se $q_Q(\underline{d}) > 0$, para todos $\underline{d} \neq 0$

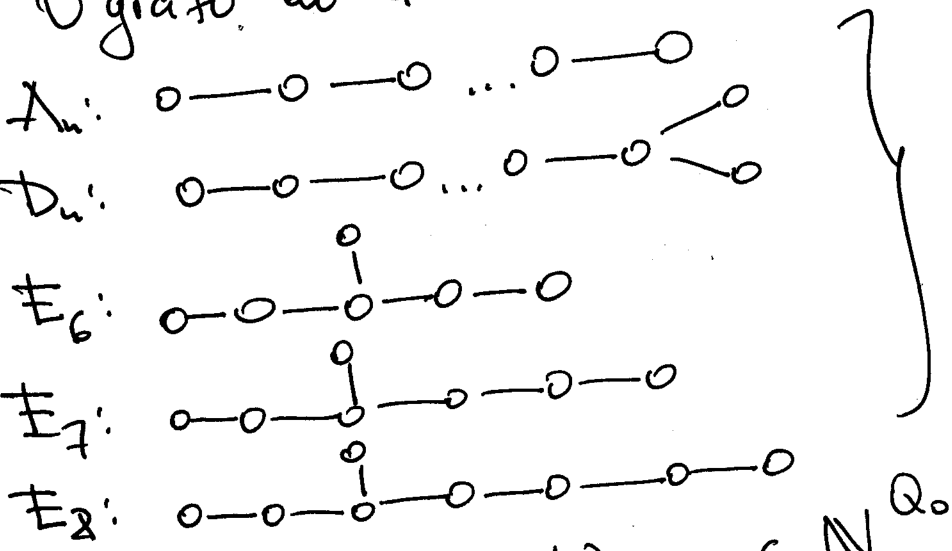
Ex. (acima) $q_Q(d_1,d_2) = \left(d_1 - \frac{d_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} d_2^2 > 0$

q_Q é positivamente definida.

Teorema (Gabriel, 72) Seja Q uma aljava conectada

Os seguintes condições são equivalentes:

1) Q tem tipo finito
2) q_Q é positivamente definida
3) O grafo do Q é um dos seguintes grafos:



Grafos de Dynkin.

Def. Um vetor $\underline{d} = (d_i)_{i\in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ é chamado raiz se $q_Q(\underline{d}) = 1$.

Exemplo: Se $Q: 1 \xrightarrow{\alpha} 2$, assim

$$q_Q(\underline{d}) = \left(d_1 - \frac{d_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} d_2^2 = 1$$

$\Rightarrow$ $d_2 = 1$, $d_1 = 1$, ou $d_1 = 0$

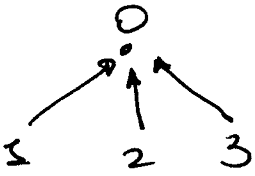
$d_2 = 0$, assim $d_1 = 1$

Assim raizes são $(d_1, d_2) = (1,0)$
$= (0,1)$
$= (1,1)$

Em particular:

$\{$raizes de $q_{A_2}\}$ $\longleftrightarrow$ $\{$dimensões dos indecomponiveis$\}$.

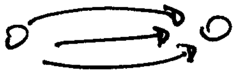
Exemplo 2



$q_{D_4}(d_0, d_1, d_2, d_3) = \sum_{i=0}^{3} d_i^2 - d_1 d_0 - d_2 d_0 - d_3 d$

$(2; 1, 1, 1)$ é raiz pois $q_{D_4}(2;1,1,1) = 1$.

Exemplo 3



raizes são

$(1,0)$, $(3,1)$, $(8,3)$, $(21,8)$, $(55,21)$, ...
$(0,1)$, $(1,3)$, $(3,8)$, $(8,21)$, $(21,55)$,

$\boxed{0}$, 1, $\boxed{1}$, 2, $\boxed{3}$ 5, $\boxed{8}$ 13, $\boxed{21}$ 34, $\boxed{55}$

Consequtivos "impares" da sequencia da Fibonacci.

Teorema (2ª parte do Teorema do Gabriel).

Seja Q tem tipo finito e conectada

$\left\{\begin{matrix}\text{dimensões dos} \\ \text{indecomponiveis}\end{matrix} \text{ do } Q\right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\text{raizes da} \\ \text{forma } q_Q\end{matrix}\right\}$.

__Obs.__ Existe versão dessa Teorema p/ aljavas com tipo infinito.

__Avaliação__:

__Trabalho 1__: Mostre que (1) ⇒ (2) no T. (do Gabriel)

__Trabalho 2__ (a) Mostre que (d_1, d_2) é raiz
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \circ \end{tikzcd}$$
s.s.e d_1, d_2 dois numeros Fibonacci impares consecutivos.