

Álgebra I: Prova Sub

(Modelo B)

1. (2.0 pontos) Resolva

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{3} \\ 2x \equiv 1 \pmod{5} \\ 4x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}.$$

2. (3.0 pontos)

a) (1,0 ponto) Calcule o inverso multiplicativo de 29 em $\mathbb{Z}_{69}$;

b) (1,0 ponto) Mostre que $77 \mid n^{31} - n$ para todo inteiro n ;

c) (1,0 ponto) Encontre o resto da divisão de $2017^{2027} - 2037^{2027}$ por 2027. (Dica: 2027 é primo!).

3. (2.0 pontos)

(a) Seja $n = p^3q$, com p e q primos distintos. Determine n , sabendo que $\varphi(n) = 18$;

(b) Mostre que

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(\text{mdc}(a, b))\varphi(\text{mmc}(a, b)).$$

4. (2.0 pontos) Resolva em $\mathbb{Z}_6$

$$\begin{cases} x + y + z = \bar{5} \\ x - y - \bar{5}z = \bar{1} \\ \bar{2}x + y + \bar{2}z = \bar{4}. \end{cases}$$

5. (2.0 pontos) Usando indução finito mostre que

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)},$$

para todo inteiro $n \geq 0$.