

Álgebra I: Prova I

(Modelo A)

1. (2.0 pontos) Mostre por indução

a) $(1 + 1) \cdot (1 + \frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{n}) = n + 1, \quad \forall n \geq 1.$

b) $8 \mid (5^{2n} - 1), \quad \forall n \geq 0.$

2. (2.0 pontos) Mostre as afirmações verdadeiras e dê um contra-exemplo para as falsas:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}, \text{ se } 15 \mid 3 \cdot 2^{99} \cdot n \text{ então } 15 \mid n.$

b) Se a e b são inteiros tais que existem r e $s \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ar + bs = 13$$

então $\text{mdc}(a, b) = 1$ ou 13 .

3. (2.0 pontos) Sejam m e n inteiros, mostre que

$$\text{mdc}(m, n) = \text{mdc}(m + n, m).$$

4. (2.0 pontos) Determine todos os múltiplos de 18 e de 21 cuja diferença seja 3.

5. (2.0 pontos) Resolva uma congruência

$$6x \equiv 9 \pmod{15}.$$