# Lista 1

## Axiomática de $\mathbb{Z}$.

1. Dado um inteiro $a$, chamamos de *valor absoluto* de $a$ o numero inteiro designado por $|a|$ e definido por
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}.$$
Sejam $a$ e $b$. Provar que
   a) $|a| \geq 0$;
   b) $|a| = 0$ se, e somente se, $a = 0$;
   c) $-|a| \leq a \leq |a|$;
   d) $|ab| = |a||b|$;
   e) $|a+b| \leq |a| + |b|$;
   f) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
2. Prove que o conjunto $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid 7 < m < 8\}$ é vazio.
3. Um elemento $a \in \mathbb{Z}$ é dito *inversível* se existir em elemento $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $aa' = 1$. Mostrar que os únicos elementos inversíveis de $\mathbb{Z}$ são $1$ e $-1$.

## Indução Finita.

4. Prove que se vale o Princípio da Indução Finita, então vale o Princípio da Boa Ordem.
5. Prove que se vale o Princípio da Indução Finita (2-da forma), então vale o Princípio da Boa Ordem.
6. Prove por indução que
   a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}, \quad \forall n \geq 1$;
   b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \forall n \geq 1$;
   c) $n^3 + 2n$ é sempre divisível por 3;
   d) $(1+h)^n \geq 1 + nh$ onde $h > 0$ está fixado e $n \geq 0$.
7. Sejam $a$ e $r$ dois números inteiros $a_1 = a, a_2 = a + r, a_3 = a + 2r, \ldots, a_n = a + (n-1)r, \ldots$ é dita uma progressão aritmética de razão $r$. Prove, utilizando o princípio de indução finita, que a soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por:
$$a + (a + r) + \cdots + (a + (n-1)r) = \frac{n(2a + (n-1)r)}{2}.$$

8. Considere a seguinte sequència de somas

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{5}{6}$$
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{23}{24}$$
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} = \frac{119}{120}$$
$$\cdots$$

e seja $P(n)$ a soma
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}.$$
Determine uma expressão para $P(n)$ e, em seguida, utilizando o Princípio da Indução Finita, prove a sua validade para $n \geq 2$.

9. Prove que se $n \geq 3$, então a soma dos ângulos internos de um polígono regular de $n$-lados é
$$(n-2)180^0.$$

10. Sabe-se que a forma trigonométrica do número complexo $z = a + bi$ é dada por
$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$
onde $\theta = \arg z$, $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Prove, utilizando o Princípio de Indução Finita, a fórmula de De Moivre, isto é, se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ então
$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

11. Seja $a \neq 0 \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$. Definimos potencia não negativa de $a$ do seguinte modo:
$$a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^m = a^{m-1} \cdot a, \quad \text{se } m > 1;$$
Prove que
   a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N};$
   b) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}.$

12. Prove que $x - y$ divide $x^n - y^n$, para quaisquer inteiros $x, y$ distintos e todo $n \geq 1$.

13. Para todo inteiro $n \geq 1$, prove que
   a) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \dfrac{x^n}{1-x};$
   b) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ (*Dica:* use o item anterior).

14. Seja $n$ um inteiro positivo. Mostre que
$$\text{a)} \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0; \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

15. Prove por indução finita que
   a) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$
   b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}.$

para todo inteiro positivo $n$.