Introdução a Álgebra Linear: Prova Sub.

Modelo A.

1. (2.5 pontos) Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real das matrizes 2×2.

a) **(1.5 pontos)** Verefique que $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base em $M_2(\mathbb{R})$.

b) **(1 ponto)** Encontre as coordenadas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em base B.

2. (2.5 pontos) Sendo $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual e

$$U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\},$$

$$W = [(1, 0, 1), (0, -1, 1)],$$

dois subespaços em V.

a) **(1 ponto)** Encontre uma base (e dimensão) para U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

b) **(1.5 ponto)** Encontre uma base ortonormal para U.

3. (2.0 pontos)

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$T(2, 4) = (4, 0), \quad T(0, 1) = (0, 1).$$

Busca os autovalores e autovetores da T.

4. (3.0 pontos)

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mostre que A é diagonalizavel. Encontre matrizes D e S tais que D é diagonal e $SDS^{-1} = A$. Calcule A^{15} usando diagonalização.

5. (extra 1.0 ponto!)

Seja $W = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(-1) = 0\}$. Busca base e dimenção da W.