

Introdução a Álgebra Linear: Prova III.

Modelo D.

1. (2.5 pontos) Em cada um dos itens abaixo determinar $d(u, v)$ (distância entre vetores u e v).

a) $V = \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, $u = (1, -1, 1, -1)$, $v = (1, 2, 2, 1)$.

b) $V = P_2(\mathbb{R})$, com o produto interno usual, $u = 1 - t$, $v = 1 + t$.

c) $V = M_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle A, B \rangle = \text{traço}(B^t A)$,

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (2.5 pontos) Sendo $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual e U é um plano em V dado por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y - z = 0\}$$

a) (1.5 ponto) Encontre uma base ortonormal para U .

b) (1 ponto) Encontre as projeções ortogonais dos vetores $v_1 = (1, 2, 7)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ sobre o subespaço U .

3. (2.0 pontos)

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$T(1, 1) = (2, 1), \quad T(0, 1) = (1, 1).$$

Busca os autovalores e autovetores da T .

4. (3.0 pontos)

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostre que A é diagonalizável. Encontre matrizes D e S tais que D é diagonal e $SDS^{-1} = A$. Calcule A^{20} usando diagonalização.