Introdução a Álgebra Linear: Prova III.

Modelo B.

1. (2.5 pontos) Em cada um dos itens abaixo determinar $d(u, v)$ (distância entre vetores u e v).

a) $V = \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 3, 4)$.

b) $V = P_2(\mathbb{R})$, com o produto interno usual, $u = 2t$, $v = 3t^2$.

c) $V = M_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle A, B\rangle =$ traço$(B^t A)$,

$$u = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (2.5 pontos) Sendo $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual e U é um plano em V dado por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 2z = 0\}$$

a) **(1.5 ponto)** Encontre uma base ortonormal para U.

b) **(1 ponto)** Encontre as projeções ortogonais dos vetores $v_1 = (1, 2, 2), v_2 = (1, 1, 1)$ sobre o subespaço U.

3. (2.0 pontos)

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$T(1, 0) = (1, 1), \quad T(1, 1) = (2, 1).$$

Busca os autovalores e autovetores da T.

4. (3.0 pontos)

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mostre que A é diagonalizavel. Encontre matrizes D e S tais que D é diagonal e $SDS^{-1}S = A$. Calcule A^{20} usando diagonalização.