

# Introdução a Álgebra Linear: Prova III.

## Modelo A.

1. (2.5 pontos) Em cada um dos itens abaixo determinar  $d(u, v)$  (distância entre vetores  $u$  e  $v$ ).

a)  $V = \mathbb{R}^4$ , com o produto interno usual,  $u = (1, 1, 1, 1)$ ,  $v = (0, 0, 1, 1)$ .

b)  $V = P_2(\mathbb{R})$ , com o produto interno usual,  $u = 2t$ ,  $v = 3t^2$ .

c)  $V = M_2(\mathbb{R})$ , com produto interno  $\langle A, B \rangle = \text{traço}(B^t A)$ ,

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (2.5 pontos) Sendo  $V = \mathbb{R}^3$  com produto interno usual e  $U$  é um plano em  $V$  dado por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

a) (1.5 ponto) Encontre uma base ortonormal para  $U$ .

b) (1 ponto) Encontre as projeções ortogonais dos vetores  $v_1 = (3, 4, -5)$ ,  $v_2 = (1, 1, 1)$  sobre o subespaço  $U$ .

3. (2.0 pontos)

Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma transformação linear tal que

$$T(0, 1) = (2, 3), T(1, 1) = (1, 1).$$

Busca os autovalores e autovetores da  $T$ .

4. (3.0 pontos)

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mostre que  $A$  é diagonalizável. Encontre matrizes  $D$  e  $S$  tais que  $D$  é diagonal e  $SDS^{-1} = A$ . Calcule  $A^{20}$  usando diagonalização.