Introdução a Álgebra Linear: Prova II.

Modelo D.

1. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real das matrizes 2×2.

a) **(1.5 pontos)** Verefique que $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base em $M_2(\mathbb{R})$.

b) **(1 ponto)** Encontre as coordenadas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ em base B.

2. **(2.5 pontos)** Encontre uma base (e dimensão) para U, W, $U \cap W$ e $U + W$, em caso

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y + 2z = 0\}, \\ W &= [(1, 1, 1), (0, -1, 1)]. \end{aligned}$$

3. **(2.5 pontos)** Encontrar uma base (e dimensão) do Ker(T) e Im(T) em caso

$$\begin{aligned} &T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), \\ &T(p(t)) = p(t) + p'(t) - t^2 p''(t). \end{aligned}$$

4. Sejam

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a + c - b - d = 0 \right\}, \\ W &= \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}. \end{aligned}$$

a) **(1.5 pontos)** Mostre que U e W são isomorfos.

b) **(1 ponto)** Encontre um isomorfismo $T : U \to W$.