Lista 6 com respostas

PROFESSOR KOSTIATYN IUSENKO

MAT0134 - 2° semestre de 2016

1 Matriz de uma transformação linear

Exercício 1.
Determine a matriz associada, na base canônica e na base $B = \{(1,1), (1,0)\}$, a transformação linear T.

(a) $T(x, y) = (2x, y)$

(b) $T(x, y) = (-y, x)$

(c) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$

(d) $T(x, y) = (x, y + x)$

(e) $T(x, y) = (0, 0)$

(f) $T(x, y) = (3x - 4y, 2x - 5z)$

(g) $T(x, y) = (y - 2x, x)$

Solução 1.

Exercício 2.
Determine a matriz $[T]^B_C$ associada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada pelo

$$T(x, y) = (2x + y, 3x - y, -y),$$

se $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$, $C = \{(0, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$.

Solução 2.

2 Autovalores, autovetores e polinômio característico

Exercício 3.
Em cada item abaixo encontre os autovalores por inspeção:

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

Solução 3.

(a) 5 e -1

(b) $3 \pm \sqrt{53}$

(c) $1, -1/3$ e $1/2$.

Exercício 4.
Encontre os autovalores e os autovetores operador T do $\mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (x+y, x-y)$.

Solução 4.
Temos $p_\lambda(T) = \lambda^2 - 2$, assim $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ são autovalores e $u_1 = (1+\sqrt{2}, 1)$ e $u_2 = (1-\sqrt{2}, 1)$ são autovetores correspondentes.

Exercício 5.
Sejam A e B matrizes triangulares com a mesma diagonal principal $a_{ii} = b_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Prove que $p_\lambda(A) = p_\lambda(B)$.

Solução 5.
Neste caso é facil ver que os polinomios caracteristicos são $p_\lambda(A) = p_\lambda(B) = (\lambda - a_{11}) \dots (\lambda - a_{nn})$.

Exercício 6.
Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear com autovetores $v_1 = (1,-1)$, $v_2 = (1,1)$ correspondendo respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2$. Seja $v = (5,1)$. Calcule $T^{10}(v)$.

Solução 6.
Temos que em base canônica a matrix da T tem forma

$$(T)_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim temos

$$(T^{10})_{can}(5,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^9} + 3 \cdot 2^{10} \\ -\frac{1}{2^9} + 3 \cdot 2^{10} \end{pmatrix}.$$

Exercício 7.
Seja A uma matriz invertível. Se λ é autovalor de A, mostre que $\lambda \neq 0$ e que $\frac{1}{\lambda} \neq 0$ é autovalor A^{-1}. Mostre que todo autovalor μ de A^{-1} tem a forma $\mu = \frac{1}{\lambda}$, onde λ é algum autovalor de A.

Solução 7.
Se λ é autovalor do T assim existe um vetor coluna não-nulo u tal que $A(u) = \lambda u$. Assim $A^{-1}(\lambda u) = u$, ou equivalente $A^{-1}(u) = \lambda^{-1} u$ e λ^{-1} é autovalor da A.

Exercício 8.
Achar os autovalores e os autovetores de operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por:

a) $T(1,0,0) = (2,0,0)$, $T(0,1,0) = (2,1,2)$ e $T(0,0,1) = (3,2,1)$;

b) $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,0,0)$ e $T(0,0,1) = (5,-1,2)$.

Solução 8.
a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. E $u_1 = (5,1,1)$, $u_2 = (1,0,0)$, $u_3 = (-1,-3,3)$.

b) $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. E $u_1 = (5,-1,2)$, $u_2 = (1,0,0)$, $u_3 = (0,1,0)$.

3 Diagonalização

Exercício 9.
Sendo $B = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\}$ e $C = \{(0,1,0),(1,1,0),(1,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$(T)^B_C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontre os autovetores e autovalores T. Verifique se T diagonalizavel.

Solução 9.
A matriz de T em base canônica tem forma

$$(T)_{can} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$ são autovalores de A e $u_1 = (-1,1,0)$, $u_2 = (0,0,1)$, $u_3 = (1,1,0)$ são autovetores correspondentes. T tem três autovalores $\lambda = 0, 2, -2$ e multiplicidades algebricas deles são iguais a multiplicidades geometricas assim T é diagonalizavel.

Exercício 10.
Mostre que $A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é diagonalizavel a menos que $c = 0$.

Solução 10.
$p_\lambda(A) = (1-\lambda)^2$. Assim temos $\lambda = 1$ é autovalor com multiplicidade algebrica 2. Agora facil ver que seu multiplicidade geometrica, isto é $\dim V_1$, é 2 se e só se $c \neq 0$.

Exercício 11.
Considere a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine todos os valores de a, b e c para os quais A é diagonalizavel.

Solução 11.
Temos $p_\lambda(A) = (a-\lambda)(c-\lambda)(1-\lambda)$. Assim A tem autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a, \lambda_3 = c$.

Em caso $a \neq c \neq 1$ claro que A é diagonalizavel para qualquer b.

Em caso $a = c = 1$ temos que A não é diagonalizavel para qualquer b, pois multiplicação algebrica de $\lambda = 1$ é 3 mas $\dim V_1 = 2$.

Em caso $a = 1, c \neq 1$ temos que A não é diagonalizavel para qualquer b, pois multiplicação algebrica de $\lambda = 1$ é 2 e $\dim V_1 = 1$ para qualquer b.

Em caso $a \neq 1, c = 1$ temos que A é diagonalizavel para qualquer b, pois multiplicação algebrica de $\lambda = 1$ é 2 e $\dim V_1 = 2$ para qualquer b.

Exercício 12.
Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear com polinômio característico denotado $p_T(\lambda)$. Verifique se T é diagonalizavel em cada um dos seguintes casos:

a) $p_T(\lambda) = \lambda^4 - 1$

b) $p_T(\lambda) = \lambda^3(\lambda + 1)$ e $\dim \text{Ker}(T) = 2$.

c) $p_T(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$ e $\dim \text{Ker}(T) = 2$.

Solução 12.

a) Não, pois $p_T(\lambda) = \lambda^4 - 1$ possui os raizes complexas.

b) Não, pois multiplicidade algebrica de $\lambda = 0$ é 2 e multiplicidade geometrica de $\lambda = 0$ é 3.

c) Sim. T tem três autovalores $\lambda = 0, 2, -2$ e multiplicidades algebricas deles são iguais a multiplicidades geometricas.

Exercício 13.
Considere a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcule A^{20}. Encontre matrizes D e S tais que D é diagonal e $S^{-1}AS = D$.

Solução 13.
Temos que $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$ são autovalores de A e $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 1, 0)$ são autovetores correspondentes. Assim A escreva-se como $A = S \cdot \text{diag}\{2, 1, 0\} \cdot S^{-1}$ com
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Portanto temos
$$A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0^{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 14.
Em cada caso, encontre o polinômio caracteristico, autovalores e autovetores e, se possível, encontre uma matriz invertível S tal que $S^{-1}AS$ é diagonal

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Solução 14.
a). Autovalores $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$, autovetores correspondentes $u_1 = (0, 1, 0)$, $u_2 = (-5, 0, 4)$, $u_3 = (-1, 0, 1)$. Assim A escreva-se como $A = S \cdot \text{diag}\{-5, 0, 4\} \cdot S^{-1}$ com

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b). Autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$, autovetores correspondentes $u_1 = (4, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$, $u_3 = (2, 1, 1)$. Assim A escreva-se como $A = S \cdot \text{diag}\{-5, 0, 4\} \cdot S^{-1}$ com

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 15.
Seja A o operador linear cuja matriz com respeito a base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontre os autovalores de A e além disso encontre uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ de forma que a matriz A seja diagonal. Por ultimo encontre uma matriz M tal que $M^{-1} = M^t$ e M^tAM é a matriz diagonal.

Solução 15.
Autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2$, autovetores correspondentes $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 2, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1)$. Os autovetores u_1, u_2, u_3 formam uma base ortogonal em $\mathbb{R}^3$, nesta base a matrix da A é $(A)_B = \text{diag}\{3, -2, 2\}$. Tomando matriz M como

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que $M^{-1} = M^t$ e $M^tAM = \text{diag}\{3, -2, 2\}$.

Exercício 16.
Encontre a formula geral para os números:

a) $L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ — Números de Lucas.

b) $J_0 = 1, J_1 = 2, J_n = 2J_{n-1} + 3J_{n-2}$.

c) $T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 2, T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ — Números de Tribonacci.

Solução 16.

a). Autovalores $\lambda_1 = 4(1+\sqrt{3})$, $\lambda_2 = 4(1-\sqrt{3})$, $\lambda_3 = -2$, autovetores correspondentes $u_1 = (4(1+\sqrt{3}), 4-4\sqrt{3}, -2)$, $u_2 = (4(1+\sqrt{3}), -4(\sqrt{3}-1), -2)$, $u_3 = (-1, 0, 3)$. u_1, u_2, u_3 são l.i. assim eles formam uma base em $\mathbb{R}^3$. Mas eles não são ortogonais.

Exercício 17.
Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Mostre que

(a) A é diagonalizável se $(a-d)^2 + 4bc > 0$.

(b) A não é diagonalizável se $(a-d)^2 + 4bc < 0$.

Solução 17.

$$\begin{aligned} p_\lambda(A) &= (\lambda - a)(\lambda - d) - bc \\ &= \lambda^2 - a\lambda - d\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 + (-a-d)\lambda + (ad - bc). \end{aligned}$$

A solução de $p_\lambda(A)$ tem multp. 2 se, e somente se,

$$\begin{aligned} (-a-d)^2 - 4(ad-bc) > 0 &\quad \Leftrightarrow \\ a^2 + d^2 + 2ad - 4ad - 4bc > 0 &\quad \Leftrightarrow \\ a^2 - 2ad + d^2 - 4bc > 0 &\quad \Leftrightarrow \\ (a-d)^2 + 4bc > 0. & \end{aligned} \tag{1}$$

Portanto, A é diagonalizável se e somente se vale (a).