Lista 6

PROFESSOR KOSTIATYN IUSENKO

MAT0134 - 2° semestre de 2016

1 Matriz de uma transformação linear

Exercício 1.
Determine a matriz associada, na base canónica e na base $B = \{(1,1),(1,0)\}$, a transformação linear T.

(a) $T(x,y) = (2x, y)$

(b) $T(x,y) = (-y, x)$

(c) $T(x,y) = (2x+y, x-y)$

(d) $T(x,y) = (x, y+x)$

(e) $T(x,y) = (0,0)$

(f) $T(x,y) = (3x-4y, 2x-5z)$

(g) $T(x,y) = (y-2x, x)$

Exercício 2.
Determine a matriz $[T]_C^B$ associada a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada pelo

$$T(x,y) = (2x+y, 3x-y, -y),$$

se $B = \{(1,0),(1,1)\}$, $C = \{(0,1,0),(1,1,1),(1,1,0)\}$.

2 Autovalores, autovetores e polinômio característico

Exercício 3.
Em cada item abaixo encontre os autovalores por inspeção:

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

Exercício 4.
Encontre os autovalores e os autovetores operador T do $\mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (x+y, x-y)$.

Exercício 5.
Sejam A e B matrizes triangulares com a mesma diagonal principal $a_{ii} = b_{ii}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Prove que $p_\lambda(A) = p_\lambda(B)$.

Exercício 6.
Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear com autovetores $v_1 = (1,-1)$, $v_2 = (1,1)$ correspondendo respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2$. Seja $v = (5,1)$. Calcule $T^{10}(v)$.

Exercício 7.
Seja A uma matriz invertível. Se λ é autovalor de A, mostre que $\lambda \neq 0$ e que $\frac{1}{\lambda} \neq 0$ é autovalor A^{-1}. Mostre que todo autovalor μ de A^{-1} tem a forma $\mu = \frac{1}{\lambda}$, onde λ é algum autovalor de A.

Exercício 8.
Achar os autovalores e os autovetores de operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por:

a) $T(1,0,0) = (2,0,0)$, $T(0,1,0) = (2,1,2)$ e $T(0,0,1) = (3,2,1)$;

b) $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,0,0)$ e $T(0,0,1) = (5,-1,2)$.

3 Diagonalização

Exercício 9.
Sendo $B = \{(1,1,0), (1,0,0), (0,1,1)\}$ e $C = \{(0,1,0), (1,1,0), (1,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$(T)_C^B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontre os autovetores e autovalores T. Verifique se T diagonalizavel.

Exercício 10.
Mostre que $A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é diagonalizavel a menos que $c = 0$.

Exercício 11.
Considere a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine todos os valores de a, b e c para os quais A é diagonalizavel.

Exercício 12.
Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear com polinômio característico denotado $p_T(\lambda)$. Verifique se T é diagonalizavel em cada um dos seguintes casos:

a) $p_T(\lambda) = \lambda^4 - 1$

b) $p_T(\lambda) = \lambda^3(\lambda + 1)$ e $\dim \text{Ker}(T) = 2$.

c) $p_T(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$ e $\dim \text{Ker}(T) = 2$.

Exercício 13.
Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule A^{20}. Encontre matrizes D e S tais que D é diagonal e $S^{-1}AS = D$.

Exercício 14.
Em cada caso, encontre o polinômio caracteristico, autovalores e autovetores e, se possível, encontre uma matriz invertível S tal que $S^{-1}AS$ é diagonal

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Exercício 15.
Seja A o operador linear cuja matriz com respeito a base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontre os autovalores de A e além disso encontre uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ de forma que a matriz A seja diagonal. Por ultimo encontre uma matriz M tal que $M^{-1} = M^t$ e M^tAM é a matriz diagonal.

Exercício 16.
Busca a formula geral para os números:

a) $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ — Números de Lucas.

b) $J_0 = 1$, $J_1 = 2$, $J_n = 2J_{n-1} + 3J_{n-2}$.

c) $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ — Números de Tribonacci.

Exercício 17.
Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Mostre que

(a) A é diagonalizável se $(a - d)^2 + 4bc > 0$.

(b) A não é diagonalizável se $(a - d)^2 + 4bc < 0$.