Lista 5 com respostas

PROFESSOR KOSTIATYN IUSENKO

MAT0134 - 2° semestre de 2016

1 Espaços com produto interno

Exercício 1.
Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$. Sendo $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 1)$ em $\mathbb{R}^2$ determine um vetor w desse espaço tal que $\langle u, w\rangle = -1$ e $\langle u, v\rangle = -1$.

Solução 1.
Consideremos $w = (x, y)$ tal que $\langle u, w\rangle = -1$ e $\langle v, w\rangle = -1$

$$x + 2y = -1$$

$$-x + y = -1$$

portanto $x = \frac{1}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}$.

$$4 = \langle u - v, u - v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = 1 - 2\langle u, v\rangle + 1$$

Portanto

$$\langle u, v\rangle = -1$$

Exercício 2.
Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano tais que $\|v\| = 1$, $\|u\| = 1$ e $\|u - v\| = 2$. Determinar $\langle u, v\rangle$.

Solução 2.

$$4 = \langle u - v, u - v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = 1 - 2\langle u, v\rangle + 1$$

Portanto

$$\langle u, v\rangle = -1$$

Exercício 3.
Num espaço vetorial euclidiano provar que $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow \langle u + v, u - v\rangle = 0$.

Solução 3.
Observe que

$$\langle u + v, u - v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle - \langle v, v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle + \langle u, v\rangle - \langle v, v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle v, v\rangle$$

Exercício 4.
Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + tx_2y_2$ é um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.

Solução 4.

Exercício 5.
Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Mostrar que $\langle u, v\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$. Determinar a norma de $u = (1, 2)$ em relação ao produto interno usual e também em relação ao produto definido nesse exercício.

Solução 5.

- $\langle x, y\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$
  $\langle y, x\rangle = y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 5y_2x_2$
- $\langle x + y, z\rangle = (x_1 + y_1)z_1 - 2(x_1 + y_1)z_2 - 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2$
  $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
- $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha x_1y_1 - 2\alpha x_1y_2 - 2\alpha x_2y_1 + 5\alpha x_2y_2 = \alpha \langle x, y\rangle$
- $\langle x, x\rangle = x_1x_1 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 5x_2x_2 = x_1^2 + 5x_2^2 \geq 0$
- $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  Com produto interno usual temos $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{5}$ e em relação ao produto definido no exercío temos $\langle x, x\rangle = 1 + 5(4) = 21$

Exercício 6.
Sendo $V = M_2(\mathbb{R})$, mostre que $\langle A, B\rangle =$ traço(B^tA) define um produto interno sobre V. Calcule $\langle A, B\rangle, \|A\|, \|B\|$ se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução 6.

$$\langle A, B\rangle = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{3}$$

$$\|B\| = \sqrt{\langle B, B\rangle} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)} = 1$$

Exercício 7.
Em cada um dos itens abaixo determinar $d(u, v)$.

a) $V = \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (0, 0, 1, 1)$.

b) $V = P_2(\mathbb{R})$, com o produto interno usual, $u = 1 + t$, $v = \frac{3}{4}t + 3t^2$.

c) $V = M_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle A, B\rangle = \text{traço}(A^t B)$,

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução 7.

1. $d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle} = \sqrt{2}.$

2. $d(u,v) = \|u-v\| = \left\|1 - \frac{1}{4}t - 3t^2\right\| = \sqrt{\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{4}t - 3t^2\right)^2 dt} = \frac{227}{240}$

3. $d(u,v) = \|u-v\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right\|$

$$d(u,v) = \sqrt{tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right)} = \sqrt{73}$$

Exercício 8.

Sejam $\langle u, v\rangle$ o produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^2$ gerado por $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $u = (2,1)$, $v = (-1,1)$, $w = (0,-1)$. calcule as expressões dadas:

(a) $\langle u, v\rangle$

(b) $\langle v, w\rangle$

(c) $\langle u+v, w\rangle$

(d) $||v||$

(e) $d(v,w)$

(f) $||v-w||^2$

Solução 8.

(a) -5

(b) 1

(c) -7

(d) 1

(e) 1

(f) 1

Exercício 9.
Sejam $\langle u, v \rangle$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$ e $u = (3, -2)$, $v = (4, 5)$, $w = (-1, 6)$. Verifique as expressões dadas

(a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

(b) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

(c) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

(d) $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$

Solução 9.
Todas essas propriedades seguem diretamente da definição de produto interno.

Exercício 10.
Mostre que vale a identidade dada com vetores de qualquer espaço com produto interno

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$$

Solução 10.
Exercício 11.
Consideremos em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno dado por

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_2^1 f(t)g(t)dt$$

Nessas condições, para que valor de m temos que $f(t) = mt^2 - 1$ é ortogonal a $g(t) = t$?

Solução 11.
Basta solucionar a equação

$$\left\langle mt^2 - 1, t \right\rangle = 0$$

i.e.

$$\frac{3}{2} - \frac{15}{4}m = 0$$

Exercício 12.
Consideremos em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno dado por

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_2^1 f(t)g(t)dt$$

Nessas condições, para que valor de m temos que $f(t) = mt^2 - 1$ é ortogonal a $g(t) = t$?

Solução 12.
Basta solucionar a equação
$$\langle mt^2 - 1, t\rangle = 0$$
i.e.
$$\frac{3}{2} - \frac{15}{4}m = 0$$

Exercício 13.
Verifique que os vetores
$$v_1 = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \quad v_2 = \left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, 0\right), \quad v_3 = (0, 0, 1)$$
formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ como o produto interno euclidiano. Depois, em cada parte, expresse o vetor dado como uma combinação linear de

(a) $(1, -1, 2)$

(b) $(3, -7, 4)$

(c) $(\frac{1}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{5}{7})$

Solução 13.
(a) $-7/5v_1 + 1/5v_2 + 2v_3$

(b) $-37/5v_1 - 9/5v_2 + 4v_3$

(c) $-3/7v_1 - 1/7v_2 + 5/7v_3$

2 Algoritmo de Gram-Schmidt

Exercício 14.
Determinar a projeção ortogonal do vetor $(1, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$ sobre o subespaço
$$W = \{(x, y, z, t) \mid x - y - z = 0, z - 2t = 0\}.$$

Solução 14.
Observar que $W = \left[\left(1, 0, 1, \frac{1}{2}\right), \left(0, 1, -1, -\frac{1}{2}\right)\right]$ usemos o processo Gram-Schmidt para achar uma base $\{w_1, w_2\}$ ortogonal de W. Assim
$$w_1 = \left(1, 0, 1, \frac{1}{2}\right)$$
$$w_2 = \left(0, 1, -1, -\frac{1}{2}\right) - \frac{\left\langle \left(0, 1, -1, -\frac{1}{2}\right), \left(1, 0, 1, \frac{1}{2}\right)\right\rangle}{\left\langle \left(1, 0, 1, \frac{1}{2}\right), \left(1, 0, 1, \frac{1}{2}\right)\right\rangle}\left(1, 0, 1, \frac{1}{2}\right)$$
$$w_2 = \left(0, 1, -1, -\frac{1}{2}\right) - \frac{-5/4}{9/4}\left(1, 0, 1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{9}, 1, -\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}\right)$$

Portanto, se $u=(1,1,0,-1)$,

$$proj_W(u)=\frac{\left\langle(1,1,0,-1),\left(1,0,1,\frac{1}{2}\right)\right\rangle}{\left\langle\left(1,0,1,\frac{1}{2}\right),\left(1,0,1,\frac{1}{2}\right)\right\rangle}\left(1,0,1,\frac{1}{2}\right)+\frac{\left\langle(1,1,0,-1),\left(\frac{5}{9},1,-\frac{4}{9},-\frac{2}{9}\right)\right\rangle}{\left\langle\left(\frac{5}{9},1,-\frac{4}{9},-\frac{2}{9}\right),\left(\frac{5}{9},1,-\frac{4}{9},-\frac{2}{9}\right)\right\rangle}\left(\frac{5}{9},1,-\frac{4}{9},-\frac{2}{9}\right)$$

$$proj_W(u)=\frac{-1/2}{9/4}\left(1,0,1,\frac{1}{2}\right)+\frac{16/9}{14/9}\left(\frac{5}{9},1,-\frac{4}{9},-\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{26}{63},\frac{8}{7},-\frac{46}{63},-\frac{23}{63}\right)$$

Exercício 15.
Determinar a projeção ortogonal de $f(t)=2t-1\in P_2(\mathbb{R})$ sobre o sub-espaço $U=[t]$, em relação ao produto interno usual.

Solução 15.

$$proj_U(f(t))=\frac{\langle 2t-1,t\rangle}{\langle t,t\rangle}t=\frac{\int_0^1(2t-1)tdt}{\int_0^1 t^2dt}t=\frac{5}{2}t$$

Exercício 16.
Determinar a projeção ortogonal de $u=(1,1)$ sobre o sub-espaço $V=[(1,3)]$ do $\mathbb{R}^2$.

Solução 16.

$$proj_V(u)=\frac{\langle(1,1),(1,3)\rangle}{\langle(1,3),(1,3)\rangle}(1,3)=\frac{2}{5}(1,3)$$

Exercício 17.
Sendo $V=M_2(\mathbb{R})$ e $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$. Se $W=\left\{\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\mid x+y-z=0\right\}$, determine uma base ortonormal para W.

Solução 17.
Observemos que $W=\left[\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right]$, para calcular usemos o processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, logo a base ortonormal é $\{w_1,w_2,w_3\}$, onde

$$w_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{w}_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}-\left\langle\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$$

$$w_2=\frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}=\frac{\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\right\|}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&0\\1/\sqrt{2}&0\end{bmatrix}$$

$$\tilde{w}_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}-\left\langle\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}-\left\langle\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&0\\1/\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\right\rangle\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&0\\1/\sqrt{2}&0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/2&0\\1/2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2&1\\1/2&0\end{bmatrix}.$$

$$w_3=\frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|}=\frac{\begin{bmatrix}-1/2&1\\1/2&0\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}-1/2&1\\1/2&0\end{bmatrix}\right\|}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&0\end{bmatrix}.$$

Exercício 18.
Ortonormalizar a base $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,0,1)$ do $\mathbb{R}^3$ pelo processo de Gram-Schmidt.

Solução 18.
A base é $\{w_1, w_2, w_3\}$, onde

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}.$$

$$\tilde{w}_2 = u_2 - \langle u_2, w_1\rangle\, w_1 = (1,-1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = (2/3, -4/3, 2/3).$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{(2/3,-4/3,2/3)}{2\sqrt{6}/3} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1).$$

$$\tilde{w}_3 = u_3 - \langle u_3, w_1\rangle\, w_1 - \langle u_3, w_2\rangle\, w_2 = (-1,0,1)$$

$$w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \frac{-1,0,1)}{\sqrt{2}}.$$

Exercício 19.
Em $P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno usual, ortonormalizar a base $\{1, 1+t, 2t^2\}$. Achar o complemento orthogonal do subespaço $W = [5, 1+t]$.

Solução 19.
A base ortonormal é $\{w_1, w_2, w_3\}$, onde

$$w_1 = 1$$

$$\tilde{w}_2 = 1 + t - \langle 1+t, 1\rangle \cdot 1 = 1 + t - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + t.$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{t-\frac{1}{2}}{\|t-\frac{1}{2}\|} = 2\sqrt{3}(t - \frac{1}{2})$$

$$\tilde{w}_3 = 2t^2 - \left\langle 2t^2, 1\right\rangle \cdot 1 - \left\langle 2t^2, -\frac{1}{2}+t\right\rangle \left(-\frac{1}{2}+t\right) = 2t^2 - \frac{3}{2} - \frac{1/6}{1/12}\left(-\frac{1}{2}+t\right)$$

$$\tilde{w}_3 = -\frac{1}{2} - 2t + 2t^2. \qquad w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|}.$$

Para o $W^{\perp}$, consideremos $p(t) = a + bt + ct^2$ tal que

$$\langle p(t), 5\rangle = 0$$

$$\langle p(t), 1+t\rangle = 0$$

logo

$$5a + \frac{5}{2}b + \frac{5}{3}c = 0$$

$$\frac{3}{2}a + \frac{5}{6}b + \frac{7}{12}c = 0$$

assim

$$b = -\frac{2}{3}a\ ,\ c = -4a$$

portanto

$$W^{\perp} = \left\{p(t) = a + bt + ct^2\ :\ \langle p(t), 5\rangle = 0,\ \langle p(t), 1+t\rangle = 0\right\}$$

$$W^{\perp} = \left\{ p(t) = a + bt + ct^2 \ : \ b = -\frac{2}{3}a \ , \ c = -4a, \ a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W^{\perp} = \left[1 - \frac{2}{3}t - 4t^2 \right]$$

Exercício 20.
Mostre que $\{1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \dots\}$ é um conjunto ortogonal em $C[0, \pi]$ usando o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Solução 20.
Claramente

$$\int_0^{\pi} \cos(nx)\boldsymbol{dx} = 0$$

usando a identidade

$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)}{2}$$

Temos para $n \neq m$

$$\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\boldsymbol{dx} = \int_0^{\pi} \frac{\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)}{2}\boldsymbol{dx} = 0$$