

Lista 5

PROFESSOR KOSTIATYN IUSENKO

MAT0134 - 2º semestre de 2016

1 Espaços com produto interno

Exercício 1.

Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$. Sendo $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 1)$ em $\mathbb{R}^2$ determine um vetor w desse espaço tal que $\langle u, w \rangle = -1$ e $\langle u, v \rangle = -1$.

Exercício 2.

Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano tais que $\|v\| = 1$, $\|u\| = 1$ e $\|u - v\| = 2$. Determinar $\langle u, v \rangle$.

Exercício 3.

Num espaço vetorial euclidiano provar que $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow \langle u + v, u - v \rangle = 0$.

Exercício 4.

Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + t x_2 y_2$ é um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.

Exercício 5.

Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Mostrar que $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$ define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$. Determinar a norma de $u = (1, 2)$ em relação ao produto interno usual e também em relação ao produto definido nesse exercício.

Exercício 6.

Sendo $V = M_2(\mathbb{R})$, mostre que $\langle A, B \rangle = \text{traço}(B^t A)$ define um produto interno sobre V . Calcule $\langle A, B \rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 7.

Em cada um dos itens abaixo determinar $d(u, v)$.

- a) $V = \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (0, 0, 1, 1)$.
- b) $V = P_2(\mathbb{R})$, com o produto interno usual, $u = 1 + t$, $v = \frac{3}{4}t + 3t^2$.
- c) $V = M_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle A, B \rangle = \text{traço}(A^t B)$,

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 8.

Sejam $\langle u, v \rangle$ o produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^2$ gerado por $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $u = (2, 1)$, $v = (-1, 1)$, $w = (0, -1)$. calcule as expressões dadas:

- (a) $\langle u, v \rangle$
- (b) $\langle v, w \rangle$
- (c) $\langle u + v, w \rangle$
- (d) $\|v\|$
- (e) $d(v, w)$
- (f) $\|v - w\|^2$

Exercício 9.

Sejam $\langle u, v \rangle$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$ e $u = (3, -2)$, $v = (4, 5)$, $w = (-1, 6)$. Verifique as expressões dadas

- (a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- (b) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- (c) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
- (d) $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$

Exercício 10.

Mostre que vale a identidade dada com vetores de qualquer espaço com produto interno

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Exercício 11.

Consideremos em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno dado por

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_2^1 f(t)g(t)dt$$

Nessas condições, para que valor de m temos que $f(t) = mt^2 - 1$ é ortogonal a $g(t) = t$?

Exercício 12.

Consideremos em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno dado por

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_2^1 f(t)g(t)dt$$

Nessas condições, para que valor de m temos que $f(t) = mt^2 - 1$ é ortogonal a $g(t) = t$?

Exercício 13.

Verifique que os vetores

$$v_1 = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right), \quad v_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right), \quad v_3 = (0, 0, 1)$$

formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ como o produto interno euclidiano. Depois, em cada parte, expresse o vetor dado como uma combinação linear de

(a) $(1, -1, 2)$

(b) $(3, -7, 4)$

(c) $\left(\frac{1}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{5}{7} \right)$

2 Algoritmo de Gram-Schmidt

Exercício 14.

Determinar a projeção ortogonal do vetor $(1, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$ sobre o subespaço

$$W = \{(x, y, z, t) \mid x - y - z = 0, z - 2t = 0\}.$$

Exercício 15.

Determinar a projeção ortogonal de $f(t) = 2t - 1 \in P_2(\mathbb{R})$ sobre o sub-espaço $U = [t]$, em relação ao produto interno usual.

Exercício 16.

Determinar a projeção ortogonal de $u = (1, 1)$ sobre o sub-espaço $V = [(1, 3)]$ do $\mathbb{R}^2$.

Exercício 17.

Sendo $V = M_2(\mathbb{R})$ e $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Se $W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \mid x + y - z = 0 \right\}$, determine uma base ortonormal para W .

Exercício 18.

Ortonormalizar a base $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1)$ do $\mathbb{R}^3$ pelo processo de Gram-Schmidt.

Exercício 19.

Em $P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno usual, ortonormalizar a base $\{1, 1 + t, 2t^2\}$. Achar o complemento orthogonal do subespaço $W = [5, 1 + t]$.

Exercício 20.

Mostre que $\{1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \dots\}$ é um conjunto ortogonal em $C[0, \pi]$ usando o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$.