Lista 4. Gabatitos

Transformações lineares

1. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

   (c) Basta multiplicar as matrizes uma pela outra.

   (d) Em B_1 $(2,-1)$e em B_2 $(-1,1)$

   (e) Em B_2 $(3,-1)$ e em B_1 $(4,-1)$

2. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 11/8 & -5/8 \\ 0 & -5/8 & 11/8 \\ 2 & 5/8 & 5/8 \end{bmatrix}$

   (b) Basta utilizar a multiplicação matricial pela matriz mudança de base que muda da base canônica do $\mathbb{R}^3$ para a base B_1. Em seguida, fazer o mesmo utilizando a matriz acima.

   (c) Faça o cálculo diretamente.

3. (a) Note que a matriz que reflete os vetores em relação à reta $x = y$ é $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Então a base que resulta quando refletimos os vetores é $\{(0,1),(1,0)\}$. Como partimos da base canônica, teremos que a matriz mudança será $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) Verifique diretamente usando a definição de matriz transposta.

4. (a) Não, pois $T(\lambda x) = |\lambda| \cdot |x| \neq \lambda|x|$ para $\lambda < 0$.

   (b) Sim, pelo definição.

   (c) Sim.

   (d) Não, pois $\mathrm{posto}(-1+1) = 0 \neq \mathrm{posto}(-1) + \mathrm{posto}(1) = 2$.

   (e) Não.

5. (a) Não, pois para $T(x,y,z,t) = T(x,y,z)$ nucleo tem forma Ker$(T) = \{(0,0,0,t), t \in \mathbb{R}\}$, assim T não é injetora.

   (b) Sim, pois $\dim(V) = \dim \mathrm{Im}(T) + \dim$ Ker(T). Assim $\dim \mathrm{Im}(T) = 4 - \dim$ Ker$(T) \leq= 2$

   (c) Sim. Pois $0 = \dim$ Ker$(T) = \dim(V) - \dim \mathrm{Im}(T) \geq \dim(V) - \dim(W)$.

   (d) Não. Por exemplo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por $T(x,y) = 0$.

   (e) Sim, veja (b).

6. (a) Desde que Ker$(T) = \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\}$, o vetor $(0,0,1)$ é base do Ker(T). Então vetores $T(1,0,0) = (1,2,3)$ e $T(0,1,0) = (1,1,1)$ formam base do $\mathrm{Im}(T)$.

   (b) Veja (a).

   (c) Desde que Ker$(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ x & y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$, base do nucleo consiste dos vetores $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então $\mathrm{Im}(T) = \left[T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$.

(d) Ker$(T) = \{a, a \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(T) = [1, t]$.

(e) Ker$(T) = \{a, a \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(T) = [1, t]$.

(f) Veja (c).

7. Usando linearidade do T, obtemos $T(0,1,0) = (5,2,7) - (2,3,1) = (3,-1,6)$ e $T(0,0,1) = (-2,0,7) - (5,2,7) = (-7,-2,0)$. Então $T(x,y,z) = x(2,3,1) + y(3,-1,6) + z(-7,-2,0) = (2x + 3y - 7z, 3x - y - 2z, x + 6y)$. Ker$(T) = \{0\}$ assim T é bijetora.

8. Definimos o operador $T : P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(p(t)) = p(t) + p(-t)$. Então Ker$(T) = [t, t^3, \ldots, t^{2k+1}], k \leq n$ e $\mathrm{Im}(T) = [T(1), T(t^2), \ldots, T(t^{2k})], k \leq n$. Enfim Ker$(T) = O$ e $\mathrm{Im}(T) = E$. Por teorema da dimenção, $\dim O + \dim E = n + 1$.

9. Complementamos o base do nucleo com elementos $(1,0,0,0,0), (1,1,0,0,0), (1,1,1,0,0)$. Sejam $T(1,0,0,0,0) = (1,0,0), T(1,1,0,0,0) = (0,1,0), T(1,1,1,0,0) = (1,1,1)$. Assim obtemos $T(x,y,z,t,w) = (x - y + z - t, y - t, z - t)$.

10. Ker$(F) = \{0\} = \mathrm{Im}(F) \cap$ Ker(F) e $\mathrm{Im}(F) = \mathbb{R}^3 =$ Ker$(F) + \mathrm{Im}(F)$ (Veja as notas das aulas).

11. (a) È facil ver que $T(x,y) = (x,y,0)$ é isomorfismo.

    (b) Os espaços não são isomorfos por que $\dim(U) = 6$ e $\dim(V) = 3$.

    (c) È facil ver que $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ é isomorfismo.

    (d) Os espaços são isomorfos por que $\dim(U) = \dim(V) = 1$.

12. a) $T^{-1}(x) = x/2$.

    b) $T^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+2y}{5}, \frac{2x-y}{5}\right)$.

13. Temos que $p(t)at + b \in$ Ker(T) se $b - a = 0$ e $a = 0$ ou seja se e só se $p(t) = 0$. Assim T é isomorphismo.

    Se $T^{-1}(at + b) = xt + y$. Assim $T(xt + y) = (at + b) = -xt + (y - x)$. Temos

$$\begin{cases} a &= -x \\ b &= y - x \end{cases}$$

    ou seja $x = -a$ e $y = b - a$. Assim $T^{-1}(at + b) = -at + (b - a)$.

14. Veja notas das aulas.