Lista 4

PROFESSOR KOSTIATYN IUSENKO

MAT0134 - 2° semestre de 2016

1 Mudança de base

Exercício 1.
Sejam $B_1 = \{u_1, u_2\}$ e $B_2 = \{v_1, v_2\}$ as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (2, 3)$, $v_1 = (1, 3)$ e $v_2 = (1, 4)$.

a) Encontre a matriz mudança de base $M_{B_1}^{B_2}$.

b) Encontre a matriz mudança de base $M_{B_2}^{B_1}$.

c) Confirme que $M_{B_1}^{B_2}$ e $M_{B_2}^{B_1}$ são inversas uma da outra.

d) Seja $w = (0, 1)$. Encontre $[w]_{B_1}$ e use a matriz $M_{B_2}^{B_1}$ para calcular $[w]_{B_2}$ a partir de $[w]_{B_1}$.

e) Seja $w = (2, 5)$. Encontre $[w]_{B_2}$ e use a matriz $M_{B_1}^{B_2}$ para calcular $[w]_{B_1}$ a partir de $[w]_{B_2}$.

Exercício 2.
Sejam $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ as bases de $\mathbb{R}^3$ dadas por $u_1 = (-3, 0, -3)$, $u_2 = (-3, 2, -1)$, $u_3 = (1, 6, -1)$, $v_1 = (-6, -6, 0)$, $v_2 = (-2, -6, 4)$ e $v_3 = (-2, -3, 7)$.

a) Encontre a matriz mudança de base $M_{B_2}^{B_1}$.

b) Seja $w = (-5, 8, -5)$. Encontre $[w]_{B_1}$ e então use a matriz mudança obtida em (a) para calcular $[w]_{B_2}$ por multiplicação matricial

c) Confira seu resultado na parte (b) calculando $[w]_{B_2}$ diretamente.

Exercício 3.
Sejam $S = \{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e a base que resulta quando os vetores de S são refletidos em torno da reta $y = x$.

a) Encontre a matriz mudança de base M_S^B.

b) Seja $P = M_S^B$ mostre que $P^t = M_B^S$.

2 Transformações lineares

Exercício 4.
Decida se as seguintes transformações $T : V \to W$ são lineares

a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $T(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$, onde $T(p(t)) = p(t+1)$ para todo polinômio $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$;

c) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, onde $T(A) =$ traço(A), $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;

d) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, onde $T(A) = \det(A)$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Exercício 5.
Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Em cada caso prove a afirmação ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa.

a) Se $\dim V = 4$, $\dim W = 3$, então T é injetora;

b) Se $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é uma base de V e $T(e_2) = 0 = T(e_4)$, então $\dim \text{Im}(T) \leq 2$;

c) Se T for injetora, então $\dim V \leq \dim W$.

d) Se $\dim V \geq \dim W$, então T é sobrejetora.

e) Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for sobrejetora, então $\dim \text{Ker}(T) = m - n$

Exercício 6.
Determinar bases para o núcleo e para a imagem das transformações lineares abaixo:

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+y, 2x+y, 3x+y)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = y + 2x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = AX$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

d) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, $T(p(t)) = p'(t)$, $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$.

e) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, $T(p(t)) = p'(t) + p''(t)$, $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$.

f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = AX + X$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Exercício 7.
Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T((1,0,0)) = (2,3,1)$, $T((1,1,0)) = (5,2,7)$, e $T((1,1,1)) = (-2,0,7)$. Encontre $T((x,y,z))$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. T é sobrejetora? T é injetora? T é bijetora?

Exercício 8.
Sejam E e O os subespaços constituídos pelos polinômios pares, $p(t)$ tal que $p(-t) = p(t)$ e ímpares $q(t)$ tal que $q(-t) = -q(t)$ de $P_n(\mathbb{R})$. Use o teorema da dimensão para mostrar que $\dim O + \dim E = n + 1$.

Exercício 9.
Determinar uma aplicaçao linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{Im}(T) = [(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)], \quad \text{Ker}(T) = [(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,0)].$$

Exercício 10.
Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação linear definida por $F(0,1,0) = (1,1,2)$, $F(0,0,1) = (0,0,2)$, $F(1,0,0) = (1,2,0)$. Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais:

$$\text{Ker}(F), \text{Im}(F), \text{Ker}(F) \cap \text{Im}(F), \text{Ker}(F) + \text{Im}(F).$$

Exercício 11.
Verifique, em cada um dos itens abaixo, se os espaços vetoriais U e V são isomorfos, justificando a resposta.

a) $U = \mathbb{R}^2$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

b) $U = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $V = \{p \in P_4(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

c) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$

d) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 12.
Em items abaixo mostre que T é um isomorfismo e encontre T^{-1}.

a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = 2x$.

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x + 2y, 2x - y)$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x + 2y, y + z, x - z)$.

Exercício 13.
Mostre que $T : P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$, $T(at + b) = (b - a) - at$ é isomorfismo e dê uma fórmula para a ação de T^{-1}.

Exercício 14.
Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ definido por $T(p(t)) = p(t) + tp'(t)$, onde p' indica a derivada de $p(t)$. Mostre que T é um isomorfismo.

Exercício 15.
Mostre que $T, R, S \in L(\mathbb{R}^2)$, dados por $T(x,y) = (x, 2y)$, $R(x,y) = (x, x + y)$, $S(x,y) = (0, x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ formam um subconjunto *l.i.* em $L(\mathbb{R}^2)$.