

Lista 3. Gabatitos

Combinações lineares. Dependência linear

1. (a) Note que S é um conjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^2$, por tanto $[S] = \mathbb{R}^2$.

(b) $[S] = \{(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

(c) Similar ao item (a), $[S] = P_3(\mathbb{R})$.

(d) $[S] = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

2. (a) $S = \{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

(b) $S = \{1\}$

(c) Separar por casos

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } A = 0$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } c = d = a = 0, b \neq 0$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } c = d = b = 0, a \neq 0$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } c = d = 0, a, b \neq 0$$

Similarmente para os outros casos

3. (a) $U \cap W = 0$ e observe que $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \in U + W$, portanto $U + W = V$

(b) $U = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$, $U \cap W = [(1, -1, -6)]$.

Similar ao item (a) note que $(1, -1, 0), (1, 3, 0), (0, 4, 6) \in U + W$ é linearmente independente, portanto $U + W = V$.

(c) $U \cap W = 0$, para $U + W$ note que

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

e que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes.

(d) Note que

$$U = [t^3, t^2 + 1, t + 1]$$

$$W = [t^3, t, 1]$$

Portanto

$$U + W = [t^3, t^2 + 1, t, 1] = P_3(\mathbb{R})$$

Agora seja $p(t) \in U \cap W$, logo existem $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$at^3 + bt + c = p(t) = \lambda_1 t^3 + \lambda_2(t^2 + 1) + \lambda_3(t + 1)$$

disso

$$a = \lambda_1$$

$$0 = \lambda_2$$

$$b = \lambda_3$$

$$c = \lambda_2 + \lambda_3$$

portanto

$$p(t) = at^3 + b(t + 1), \text{ para alguns } a, b \in \mathbb{R}$$

daí

$$U \cap W = [t^3, t + 1]$$

4. (a) l.i.

(b) l.i.

(c) l.i.

(d) l.i.

(e) l.i.

(f) l.i. Considere uma combinação linear

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos(2x) + \lambda_3 \cos(3x) = 0$$

logo

$$0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\lambda_2$$

assim

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_3 \cos(3x) = 0$$

$$f'(x) = -\lambda_1 \sin(x) - 3\lambda_3 \sin(3x) = 0$$

disso tem-se

$$0 = f(0) = \lambda_1 + \lambda_3$$

$$0 = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\lambda_1 + 3\lambda_3$$

portanto

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0$$

(g) l.i. Similar ao item anterior.

5. Sem perda de generalidade assuma que $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ com $n > m$, sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ os vetores linha de A , i.e.,

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Note-se que $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $\dim(\mathbb{R}^m) = m < n$, então $v_1, v_2, \dots, v_n$ são linearmente dependentes.

Base. Dimensão

1. $a \neq 0$ e $a \neq \pm\sqrt{2}$ para que B seja l.i. (Dica: use determinante).
2. (a) Sim
(b) Sim
(c) Sim
3. (a) $\{(1, 1, 0, -3), (0, 0, 1, 0)\}$
(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
(c) $\{1, x\}$
4. (a) i. $U = [(1, 0, -1), (0, 1, -1)]$
ii. $W = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$
iii. $U + W = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, -1)] = \mathbb{R}^3$
iv. $U \cap W = [(1, -1, 0)]$
(b) i. $U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$
ii. $W = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$
iii. $U + W = U$
iv. $U \cap W = W$
(c) i. $U = \mathbb{R} = [1]$
ii. $W = [t^2 - t]$
iii. $U + W = [t^2 - t, 1]$
iv. $U \cap W = \{0\}$
5. (a) $[u] = (-1, 8, 5)$
(b) $[u] = (-3, 9, -1)$
(c) $[u] = \left(-\frac{9}{11}, \frac{36}{11}, -\frac{2}{11}\right)$
6. (a) $[p(t)] = (10, 0, 1, 2)$
(b) $[p(t)] = (10, -1, -1, 2)$

(c) $[p(t)] = (-2, 10, -1, 2)$

7. (a) $[A] = (2, 5, -8, 7)$

(b) $[A] = (-3, 13, -15, 7)$

8. Por exemplo, $\mathbb{R}^4 = [(1, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)]$

9. Note que

$$\{(0, 2, -1, 0, 1), (0, 0, 3, -1, 2), (0, 4, -5, 1, 0)\} \text{ é l.d.}$$

e

$$\{(0, 2, -1, 0, 1), (0, 0, 3, -1, 2)\} \text{ é l.i.}$$

Portanto $m = 6$.

10. Os subespaços de soluções são respectivamente

$$\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left[\begin{pmatrix} 28 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -27 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$