Lista 3

PROFESSOR KOSTIATYN IUSENKO

MAT0134 - 2° semestre de 2016

Combinações lineares. Dependência linear.

1. Para cada um dos subconjuntos S e V, onde V é o espaço vetorial indicado, encontrar o subespaço gerado por S, isto é, $[S]$.

   a) $S = \{(1,0),(2,-1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

   b) $S = \{(1,1,1),(2,2,0)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   c) $S = \{1, t, t^2, 1+t^3\}$, $V = P_3(R)$.

   d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

2. Em cada um dos itens abaixo encontrar um subconjunto S, finito, que gera o subespaço vetorial W do espaço vetorial V.

   a) $W = \{(x,y,z) \in V = \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$

   b) $W = \{p(t) \in V = P_3(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

   c) $W = \{X \in V = M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

3. Encontrar, em cada um dos itens abaixo, os subconjuntos S do espaço vetorial V que geram U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

   a) $U = [(1,0,0),(1,1,1)]$, $W = [(0,1,0),(0,0,1)]$, $V = \mathbb{R}^3$.

   b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, $W = [(1,3,0),(0,4,6)]$, $V = \mathbb{R}^3$.

   c) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$, $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

   d) $U = [t^3 + 4t^2 - t + 3, t^3 + 5t^2 + 5, 3t^3]$, $W = [t^3 + 4t, t - 1, 1]$, $V = P_3(\mathbb{R})$.

4. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o subconjunto S do espaço vetorial V é l.i. ou l.d.

   a) $S = \{(1,2),(-3,1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

   b) $S = \{1 + t - t^2, 2 + 5t - 9t^2\}$, $V = P_2(\mathbb{R})$.

   c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

   d) $S = \{(1,2,2,-3),(-1,4,-2,0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_3(\mathbb{R})$.

f) $S = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x\}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

g) $S = \{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}, x^3e^{2x}\}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

5. Uma matriz A não é quadrada, mostre que ou as linhas ou as colunas de A são l.d.

Base. Dimenção.

1. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto $B = \{(a,1,0), (1,a,1), (0,1,a)\}$ é uma base de $\mathbb{R}$?

2. Verificar em cada um dos casos se o subconjunto B do espaço vetorial V é uma base para V.

   a) $B = \{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}$, $V = P_3(\mathbb{R})$.

   b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

   c) $B = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

3. Encontrar em cada um dos itens abaixo uma base e a dimensção do subespaço W do espaço vetorial V.

   a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0, e\ x + 2y + t = 0\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

   b) $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

   c) $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $V = P_2(\mathbb{R})$.

4. Dados U, W subespaços do espaço vetorial V determinar:

   i) uma base e a dimensção de U;

   ii) uma base e a dimensção de W;

   ii) uma base e a dimensção de $U + W$;

   iv) uma base e a dimensção de $U \cap W$.

   nos seguintes casos

   a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $W = \{(x,y,0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   b) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$, $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$. $tr(A)$ é a some dos elementos da diagonal principal de A, chamado de *traço* de A.

   c) $U = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1) = 0\}$, $V = P_2(\mathbb{R})$.

5. Determinar as coordenadas de $u = (-1, 8, 5) \in \mathbb{R}^3$em relação as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$ abaixo;

   a) base canônica;

   b) $\{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$;

   c) $\{(1,2,1), (0,3,2), (1,1,4)\}$.

6. Determinar as coordenadas de $p(t) \in P_3(\mathbb{R})$, dado por $p(t) = 10 + t^2 + 2t^3$, $t \in \mathbb{R}$ em relação as seguintes bases de $P_3(\mathbb{R})$;

a) base canônica $\{1, t, t^2, t^3\}$;

b) $\{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$;

c) $\{4+t, 2, 2-t^2, t+t^3\}$.

7. Determinar as coordenadas do vetor $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ em relação as seguintes bases de $M_2(\mathbb{R})$;

a) base canônica;

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

8. Determine uma base de R^4 que contenha os vetores $(1, 1, 1, 0)$ e $(1, 1, 2, 1)$.

9. Sejam $W = [(0, 2, -1, 0, 1), (0, 0, 3, -1, 2), (0, 4, -5, 1, 0)]$, e $v = (0, m, -m, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$. Determine uma base de W. Determine todos os valores de m para os quais $v \in W$.

10. Para os sistemas lineares a seguir, determine a dimensçao e uma base do subespaço das soluções:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y + 2z - w & = & 0, \\ x - 2y + 4z + 3w & = & 0, \\ x - 5y - 2z - 9w & = & 0. \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x + 5y - 3z + 2w & = & 0, \\ x + 6y + 2z - 3w & = & 0, \\ x + 3y - 13z + 12w & = & 0. \end{array} \right.$$