Lista 2 (v.2)

PROFESSOR KOSTIATYN IUSENKO

MAT0134 - 2° semestre de 2016

1 Matrizes inversas e regra de Cramer

Exercício 1.

Calcule o determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}$ e conlua que A possui uma inversa para quaisquer a, b e c.

Exercício 2.
Explique a diferença entre a matriz adjunta e a matriz dos cofatores.

Exercício 3.
Encontre A^{-1}, onde

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{pmatrix}$

Exercício 4.
Se $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, encontre A^{-1} e $(A^{-1})^{-1}$. Explique seu resultado.

Exercício 5.
Assuma que é dada a matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,

a) Encontre X de modo que $AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Encontre X de modo que $XA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercício 6.
Quando possível, resolva o sistema dado, usando a regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 7z &= 1 \\ x + 3z &= 5 \\ 2y - z &= 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 7y + 8z &= 23 \\ 2x + 6y - 9z &= 61 \\ -1x - 4y + 3z &= -19 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z &= 1 \\ 2x + y &= 3 \\ y - 5z &= 4 \end{cases}$

2 Espaços e subespaços vetoriais

Exercício 7.
Mostre que (com as regras usuais para somar funções e multiplicar funções por numeros reais) o conjunto S dos funções da reta na reta que se anulam no ponto 2 é um espaço vetorial. O que acontece se a condição $f(2) = 0$ é substituida por $f(2) = 1$?

Exercício 8.
Verifique se $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações de adição $\oplus$ e de multiplicação por escalares $\otimes$ dadas por:

a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $\lambda \otimes (x, y) = (x, \lambda y)$

b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$; $\lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

c) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_2, -x_2 + y_1)$; $\lambda \oplus (x, y) = (x, \lambda y)$

d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1)$; $\lambda \otimes (x, y) = (\lambda x - \lambda + 1, \lambda y - \lambda + 1)$

Exercício 9.
Verifique se W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V nos seguintes casos

a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$

c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ é inversivel}\}$

d) $V = M_n(\mathbb{R})$, dada $B \in M_n(\mathbb{R})$, defina $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid BA = 0\}$.

e) $V = M_n(\mathbb{R})$, $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$

f) $V = P_3(\mathbb{R})$, $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$

g) $V = P_3(\mathbb{R})$, $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1)\}$

h) $V = C^2(\mathbb{R})$, $W = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid af'' + bf' + c = 0\}$

k) $V = C(\mathbb{R})$, $W = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(x)^2 dx = 0\}$

Exercício 10.
Em cada item abaixo encontrar os subespaços $U + W$ e $U \cap W$, onde U, W são subespaços do espaço vetorial V indicado.

a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}, V = \mathbb{R}^2$.

b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}, V = M_2(\mathbb{R})$.

c) $V = P_3(\mathbb{R}), U = \{p(t) \in V \mid p''(t) = 0\}, W = \{q(t) \in V \mid q'(t) = 0\}$.

Exercício 11.
Verifique em cada um dos itens abaixo se $V = U \oplus W$.

a) $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$

b) $V = M_3(\mathbb{R}), U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$,
$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \mid e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}$

c) $V = P_3(\mathbb{R}), U = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1) = 0\}$,
$W = \{q(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid q'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$

d) $V = M_2(\mathbb{R}), U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}, W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$.