Lista 2 com respostas

PROFESSOR KOSTIATYN IUSENKO

MAT0134 - 1° semestre de 2016

1 Matrizes inversas e regra de Cramer

Exercício 1.

Calcule o determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}$ e conlua que A possui uma inversa para quaisquer a, b e c.

Solução 1.

Basta verificar que para todos a, b, c o determinante de A é diferente de zero, condição necessária e suficiente para afirmar que A possui inversa.

Exercício 2.

Explique a diferença entre a matriz adjunta e a matriz dos cofatores.

Solução 2.

Lembre-se que a matriz adjunta da matriz A é definida como a matriz transposta da matriz dos cofatores.

Exercício 3.

Encontre A^{-1}, onde

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{pmatrix}$

Solução 3.

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 12 & -6 \\ 11 & 14 & -43 & 22 \\ 10 & 14 & -41 & 21 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{x} & \frac{1}{x} \\ -1 & -1 + \frac{2}{x} & 1 - \frac{1}{x} \\ 0 & \frac{2}{x^2} & \frac{-1}{x^2} \end{pmatrix}$

Exercício 4.

Se $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, encontre A^{-1} e $(A^{-1})^{-1}$. Explique seu resultado.

Solução 4.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 11 \\ -3 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e $(A^{-1})^{-1} = A$

Exercício 5.

Assuma que é dada a matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,

a) Encontre X de modo que $AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Encontre X de modo que $XA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Solução 5.

b) Aqui você deve multiplicar a equação dada à direita por A^{-1}. O resultado é $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 14 & 25 & 13 \end{pmatrix}$.

Exercício 6.

Quando possível, resolva o sistema dado, usando a regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 7z & = & 1 \\ x + 3z & = & 5 \\ 2y - z & = & 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 7y + 8z & = & 23 \\ 2x + 6y - 9z & = & 61 \\ -1x - 4y + 3z & = & -19 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z & = & 1 \\ 2x + y & = & 3 \\ y - 5z & = & 4 \end{cases}$

Solução 6.

a) $x = -49, y = 9, z = 18$

b) $x = 1370/127, y = -313/127, z - 765/127$

c) $x = 36/23, y = -3/23, z = -19/23$

2 Espaços e subespaços vetoriais

Exercício 7.
Mostre que (com as regras usuais para somar funções e multiplicar funções por numeros reais) o conjunto S dos funções da reta na reta que se anulam no ponto 2 é um espaço vetorial. O que acontece se a condição $f(2) = 0$ é substituida por $f(2) = 1$?

Solução 7.
Se a condição $f(2) = 0$ é substituida por $f(2) = 1$, observe que com a regra usual para multiplicar tem-se $2f(2) = 2 \neq 1$ e portanto, $2f \notin S$.

Exercício 8.
Verifique se $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R})\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações de adição $\oplus$ e de multiplicação por escalares $\otimes$ dadas por:

a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);\qquad \lambda \otimes (x, y) = (x, \lambda y)$

b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1);\qquad \lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

c) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_2, -x_2 + y_1);\qquad \lambda \oplus (x, y) = (x, \lambda y)$

d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1);\qquad \lambda \otimes (x, y) = (\lambda x - \lambda + 1, \lambda y - \lambda + 1)$

Solução 8.

a) Não, pois $0 \otimes (1, 2) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

b) Não

c) Ver (a)

d) Similar ao item (a)

Exercício 9.
Verifique se W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V nos seguintes casos

a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$

c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A$ é inversivel$\}$

d) $V = M_n(\mathbb{R})$, dada $B \in M_n(\mathbb{R})$, defina $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid BA = 0\}$.

e) $V = M_n(\mathbb{R})$, $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$

f) $V = P_3(\mathbb{R})$, $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$

g) $V = P_3(\mathbb{R})$, $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1)\}$

h) $V = C^2(\mathbb{R})$, $W = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid af'' + bf' + c = 0\}$

k) $V = C(\mathbb{R})$, $W = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(x)^2 dx = 0\}$

Solução 9.

a) Sim

b) $(1,1,1) \in W$ mas $\sqrt{2}(1,1,1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin W$

c) Observe que $0 \notin W$.

d) Sim

e) Sim

f) Repare que $p(t) = t^2 \in W$ e $-p(t) = -t^2 \notin W$.

g) Sim

h) Observe que W é subespaço se, e somente se, $c = 0$.

i) Sim. Dica: mostre primeiro que $W = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f(x) = 0, se\ 0 < x < 1\}$.

Exercício 10.
Em cada item abaixo encontrar os subespaços $U + W$ e $U \cap W$, onde U, W são subespaços do espaço vetorial V indicado.

a) $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

b) $U = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & b \end{array} \right) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $W = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & c \\ 0 & d \end{array} \right) \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

c) $V = P_3(\mathbb{R}), U = \{p(t) \in V \mid p''(t) = 0\}, W = \{q(t) \in V \mid q'(t) = 0\}$.

Solução 10.

a) $U + W = U = W = U \cap W$

b)
$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Ver (a)

Exercício 11.
Verifique em cada um dos itens abaixo se $V = U \oplus W$.

a) $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$

b) $V = M_3(\mathbb{R}), U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$,
$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \mid e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}$

c) $V = P_3(\mathbb{R}), U = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1) = 0\}$,
$W = \{q(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid q'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$

d) $V = M_2(\mathbb{R}), U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}, W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$.

Solução 11.

a) Observe que U, W são subespaços de V, $U \cap W = (0, 0)$ e para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$(a, b) = \lambda_1(1, -\frac{2}{3}) + \lambda_2(1, 1)$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{3}{5}(a - b)$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{5}(2a + 3b)$$

b) Similarmente U, W são subespaços de V, $U \cap W = 0$ e

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$$

c) Observe que

$$U = \{at^3 + bt^2 + ct \mid a + b + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$
$$W = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

e além disso, $p(t) = t \in P_3(\mathbb{R})$ mas $p \notin U + W$.

d) Note que U, W são subespaços de V, $U \cap W = 0$ e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & 0 \end{pmatrix}$$