Lista 1. Gabatitos

Resolução de sistemas de equações lineares. Matrizes inversíveis.

1. a) A solução do sistema é $x_1 = x_3 + 5$, $x_2 = \frac{5}{2}x_3 - \frac{9}{2}$, x_3 arbitrario. A matriz escalonada na forma reduzida é:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -5/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   b) O sistema é incompative, isto é, não existem soluções que o satisfazem.
   c) A solução do sistema é $x_1 = 2x_2 + 13x_5 + 9$, x_2 arbitrario, $x_3 = -2$ e $x_4 = -4x_5 - 2$. A matriz escalonada na forma reduzida é:
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -13 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Vale a pena visitar esta página caso você esteja encontrando dificuldades nesses exercícios: http://goo.gl/kZGLhD

2. a) O sistema tem nenhuma solução se $a \neq \frac{1}{2}(3b + c)$. Se $a = \frac{1}{2}(3b + c)$ o sistema possui infinitas soluções.
   b) Se $a = 2$ e $b \neq -1$ o sistema tem nenhuma solução. Se $a = 2$ e $b = -1$ tem infinitas soluções. Se $a \neq 2$ tem única solução.

3. a) $m = -6$
   b) $m \neq \frac{73}{6}$
   c) o sistema sempre tem infinitas soluções.

4. Posto é 3.

5. Dica: Já sabemos que a matriz transposta deve ter o mesmo número de linhas não nulas que a matriz original. Suponha que $n < m$ e agora olhe o número de linhas da matriz transposta.

6. Dica: Se o posto da matriz é r quando encontrarmos a matriz na forma escalonada reduzida obteremos exatamente r linhas não nulas, isto indica, r indeterminadas completamente descritas no sistema linear. Agora, quantas indeterminadas estão livres como parâmetros?

7. Dica: Considere três tipos dos operaçoes elementares, e mostre para cada uma. Mostre que posto do matriz $m \times n$ é menor ou igual ao $\min\{n, m\}$.

8. a) $U = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix}$.

9. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   b) $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

10. Dica: Multiplique a igualdade $AC = CA$ por A^{-1} ao lado esquerdo e lado direito.

11. a) $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
  b) $k = 2$.

Use a dica :)

Determinantes.

1. Dica: Usando a formula $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ faz a soma da primeira coluna com a terceira. Depois mostre que a primeira coluna é igual a segunda.

2. Dica: Utilize a formula geral para o determinante da matriz $A = (a_{ij})$, observando que neste caso $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos i, j.

3. $$\begin{array}{lll} a) \det A = \pm 1, & b) \det A = 1, & c) \det A = 0, 3, \\ d)\text{não é possivel}, & e) \det A = -1, 0, 1. & \end{array}$$

4. $$a) \det A = 9, \quad AdjA = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b) \det A = -7672, \quad AdjA = \begin{pmatrix} -717 & -612 & 880 & -483 \\ 732 & -368 & 128 & -140 \\ -1350 & 1056 & 1368 & -182 \\ -1339 & 221 & 1408 & 581 \end{pmatrix}.$$

5. $\det A = 3a^2 + b^2 + c^2 > 0$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, assim a matriz é inversivel.

6. $$a) c \neq 0, \pm 1. \quad A^{-1} = \frac{1}{c(c^2-1)} \begin{pmatrix} c & -c & c^2 \\ c^2-2 & 1 & -c \\ -2 & 1+c^2 & -2c \end{pmatrix},$$

$$b) c \neq \pm 1. \quad A^{-1} = \frac{1}{c^2-1} \begin{pmatrix} 1-c & c-c^2 & 0 \\ -1-c & 1-c & -1+c \\ -2c & c-c^2 & 1+c \end{pmatrix}.$$

7. Dica: Utilize $Adj(A) = (\det A)A^{-1}$.

8. Dica: Escreva as matrizes explicitamente e aplique a fórmula de Laplace para cálculo do determinante.