Lista 1

Resolução de sistemas de equações lineares. Matrizes invertíveis.

1. Para cada um dos seguintes sistemas de equações lineares, escreva a forma escalonada reduzida da matriz completa e resolva o sistema

a) $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1, \\ x_1 + x_3 &= 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= -3. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 8x_3 &= 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\ -x_1 + 8x_2 - 25x_3 &= -5. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 &= 1, \\ -3x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 9x_4 + 3x_5 &= -1, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 &= 3, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 1. \end{cases}$$

2. Em cada caso, encontre (se possível) condições sobre os números a, b e c para que o sistema dado tenha nenhuma solução, uma única solução, ou infinitas soluções

a) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= a, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= b, \\ x_1 - 3x_2 &= c. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} ax_1 + x_2 &= -1, \\ 2x_1 + x_2 &= b. \end{cases}$$

3. Determine os valores de m para os quais o sistema possui uma única solução

a) $$\begin{cases} -4x + 3y &= 2, \\ 5x - 4y &= 0, \\ 2x - y &= m. \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= -1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - mx_4 &= 0. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 7, \\ x_2 + mx_3 &= 8, \\ x_1 + 2x_2 + z &= 6. \end{cases}$$

Def. 1. Dada uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, seja $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ a matriz reduzida à forma escada equivalente a A. O *posto* de A é numero de linhas não nulas de B.

4. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$
Mostre que A e A^t tem o mesmo posto. Observação: isso é verdadeiro para toda matriz A.

5. Se A é uma matriz $m \times n$ e o posto de A é m, mostre que $m \leq n$.

6. Suponha que um sistema de m equações em n indeterminadas tem pelo menos uma solução. Mostre que se o posto da matriz completa é r, o conjunto de soluções tem exatamente $(n-r)$ parâmetros.

7. Uma matriz E chama-se elementar, se E é obtida de I_n por meio de uma e uma só operação elementar. Se E é elementar, mostre que E^t também.

8. Em cada caso encontre matrizes inversìveis U tais que $UA = R$ é a forma reduzida de A

   a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

   b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

9. Em cada caso encontre a matriz A

   a) $[2A^T - 3I]^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   b) $[A^T - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}]^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Se A é invertível, e A comuta com C, mostre que A^{-1} também comuta com C. Se A e C são inversíveis e comutam, mostre que A^{-1} e C^{-1} também comutam.

11. Um sistema de equações lineares é denominado *homogêneo* se todos os termos constantes forem nulos. Assim, uma equação linear homogênea típica, em n indeterminadas $x_1, x_2, ..., x_n$ tem a forma
$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$$

    a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?

    b) Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$, tais que o sistema homogêneo
$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ 2x + kz = 0. \end{cases}$$
    tenha uma solução distinta da solução a).

12. Mostre que um sistema de equações lineares homogêneo tem mais incógnitas que equações, então, ele admite uma solução não trivial.

    Dica: Suponha que existam m equações em n incógnitas, de forma que nossa hipótese é que $n > m$. Se r é o posto da matriz completa então, o que podemos concluir é que $r \leq m$, porque? Utilize o resultado obtido no exercício 6 para concluir.

Determinantes.

1. Provar que $\det A = 0$ sendo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{bmatrix}.$$

2. Seja A uma matriz de ordem n tal que $A + A^t = 0$. Provar que $\det A = (-1)^n \det A$.

3. O que pode ser dito sobre o valor de $\det A$, onde A é uma matriz $n \times n$ tal que
$$\begin{array}{llllll} a) & A^2 = I_n, & b) & A^3 = I_n, & c) & A^2 = 3A, \\ d) & A^2 + I_n = 0, & e) & A^3 = A. & & \end{array}$$

4. Encontre a adjunta e o determinante das seguintes matrizes e cheque o resultado verificando que $A(AdjA) = \det A \cdot I_n$ em cada caso
$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b) \quad A = \begin{bmatrix} 8 & -11 & 0 & 4 \\ 11 & 2 & -2 & 9 \\ -1 & 12 & 3 & 3 \\ 12 & 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Mostrar, usando determinante, que
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 3 \end{bmatrix}$$
possui uma inversa para qualquer a, b e c.

6. Em cada caso, encontre os valores do numero c tal que A possui a inversa e encontre para tais valores de c:
$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 0 & c \\ c & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -c & c \\ 1 & 1 & -1 \\ c & -c & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Se A é $n \times n$ invertível, mostre que
$$\det adj(A) = (\det A)^{n-1}.$$

8. Sejam $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ e seja
$$x = \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$
de ordem 4. Provar que $\det X = \det A \det B$. Este resultado vale para $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$.