Cálculo II — Lista 5.

1) Esboce a curva de nível de $f(x,y)$ que passa pelo ponto P e desenhe o vetor gradiente de f em P:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$; $P = (-2,2)$;

   (b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$; $P = (-2,0)$;

   (c) $f(x,y) = x^2 - y^2$; $P = (2,-1)$.

2) Em cada caso, esboce a superfície de nível c da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

   a) $F(x,y,z) = x + 2y + 3z$ e $c = 1$;

   b) $F(x,y,z) = x^2 - e^y + z^2$ e $c = 0$;

   c) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 0$;

   d) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = -1$;

   e) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ e $c = 1$;

   f) $F(x,y,z) = x^2 - y^2$ e $c = 1$.

3) Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ nos quais a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3,-1,0)$ e $(5,3,6)$.

4) Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1,1,2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

5) Ache a reta tangente à interseção do gráfico de $f(x,y) = x^3 + y^3 + 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 2$ no ponto $(1,1,4)$.

6) Considere a superfície $xz - yz^3 + yz^2 = 2$.

   (a) Determine a equação do plano tangente à superfície no ponto $(2,-1,1)$;

   (b) Determine as equações parametricas da reta que é normal à superfície no ponto $(2;-1;1)$.

7) Determine a derivada direcional de f no ponto P na direção do vetor $\vec{u}$:

   (a) $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$; $P = (\pi/3; -2\pi/3)$; $u = (2,3)$;

   (b) $f(x;y) = \sqrt{xyz}$; $P = (2,-1;-2)$; $u = (1,2,-2)$.

8) Determine a derivada direcional máxima de f no ponto P e a direção em que isto ocorre:

   (a) $f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$; $P = (1,5,-2)$.

   (b) $f(x,y) = \sqrt{xy^2z^3}$; $P = (2,2,2)$.

9) Suponha que f é diferenciável em $(1,2)$, com $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,2) = -5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 10$, onde $\vec{u} = (\frac{3}{4}, -\frac{4}{5})$ e $\vec{v} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ Determine:

   (a) $f_x(1,2)$;

   (b) $f_y(1,2)$;

   (c) a derivada direcional de f em $(1,2)$ na direção e sentido da origem.

10) Dados $z = 3xy - 4y^2$; $x = 2se^r$; $y = re^{-s}$, determine $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial r}$ de duas maneiras:

(a) expressando z em termos de r e s;

(b) usando a regra da cadeia.

11) Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Se $f(x,y) \neq (0,0)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

(b) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$

(d) O que aconteceu? Porque as derivadas mistas não são iguais?

12) Uma função $w = f(x,y,z)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

é chamada *harmônica*. Qual das funções abaixo são harmônicas?

(a) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$;

(b) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(y)$;

(c) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

13) Determine o maior conjunto aberto no qual $f_{xy} = f_{yx}$

(a) $f(x,y) = 4x^3y + 3x^2y$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$.

14) Seja $y = \phi(x - at) + \psi(x + at)$. Mostre que $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, para todo x, onde ϕ, ψ são funções duas vezes diferenciáveis.

15) Seja $r = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 0,$$

para todo (x,y), onde ϕ, ψ são funções duas vezes diferenciáveis.