Cálculo II — Lista 4.

1) Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

a) $f(x,y) = 7xy^3 - 2x^3 + 8y^2 - \dfrac{1}{4}$

b) $f(x,y) = \operatorname{tg}(xy) - \dfrac{1}{xy}$

c) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^4) + 3x$

d) $f(x,y) = \mathrm{e}^{3x^2+y^3} - 7x + \dfrac{1}{x+2y}$

e) $f(x,y) = x\sqrt{3x^2y + 7y^3}$

f) $f(x,y) = \ln(x^2 + 4y^2 + 2)$

g) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

h) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - 2y}{x^2 - 4y}$

i) $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

j) $f(x,y) = \ln(xy^3 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2})$

2) Determine o conjunto dos pontos em que as funções admitem derivadas parciais:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4(x+1)^3}{(x+1)^2+y^2} + 5x, & \text{se } (x,y) \neq (-1,0) \\ -5, & \text{se } (x,y) = (-1,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy+y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3) Seja $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $h(4) = 3$ e $h'(4) = -1$.
Considere $f(x,y) = xh(3x^2 + y^3)$. Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

4) a) Seja $z = x \operatorname{sen} \dfrac{x}{y}$. Verifique que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z\,.$$

b) Seja $f(x,y) = x^3y - y^3x$. Procure

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}},$$

em ponto $(1,2)$.

5) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, sendo

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6) Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciavel.

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

d)

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}, & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

7) Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

a) $z = 2x^2y$, no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

b) $z = xe^{x^2-y^2}$, no ponto $(2, 2, f(2, 2))$.

c) $z = e^x \ln(y)$, no ponto $(3, 1, 0)$.

d) $z = \arctan(x - 2y)$, no ponto $(2, \frac{1}{2}, f(1, \frac{1}{2}))$.

8) Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x+3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2+xy$.

9) Determine o plano que passa por $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.

10) Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e que contenham a intersecção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.

11) Calcule os valores aproximados das:

a) $\sqrt{1.01} + \sqrt[3]{7.9}$.

b) $1.04^{2.02}$.

c) $\sqrt{0.98^2 + 1.01^2 + 2.03^2}$.

d) $e^{1.01^2-1.002^2}$

12) Calcule as derivadas mencionadas pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

a) $z = e^{x-2y}, x = \operatorname{sen} t, y = t^3$, $\dfrac{dz}{dt}$ =?.

b) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \operatorname{sen} t$, $y = e^t$, $\dfrac{dz}{dt}$ =?.

c) $z = x^2y - y^2x$, $x = u \operatorname{sen} t$, $y = u \cos t$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ =?, $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ =?.

d) $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ =?, $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ =?.

13) Seja $z = f(u - v, v - u)$. Verefique que

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

14) Suponha que para todo t, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.