

Gabarito — Lista I — MAT0147

1. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{3}\vec{c} - \vec{a} + \vec{b} + \frac{4}{5}\vec{a}.$

2. (a)

(b)

(c)

(d)

(e) Como $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$ e $|\vec{v}| = \sqrt{2}$, então

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{v}|} + \frac{\vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3, 1, -2) + \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 0, -1) = \left(\frac{21\sqrt{2} + \sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{14\sqrt{2} + \sqrt{14}}{14} \right)$$

(f) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 + 2 = 5$

(g)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} = -(1, 1, 1)$$

(h)

(i)

3. Considere $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ o qual é ortogonal a $\vec{u}, \vec{v}$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = -\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} = (-1, -1, 1)$$

agora determine o ângulo θ entre $\vec{w}$ e $\vec{k}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{k}}{|\vec{w}| |\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

logo $\theta < \frac{\pi}{2}$, portanto basta tomar $\vec{b} = -\vec{w} = (1, 1, -1)$ e como $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ então considere $\vec{a} = \sqrt{3}\vec{b}$.

4. (a) Note que, se $B = (x, y, z)$, então

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x, y, z) - (-1, 2, 0) = (x + 1, y - 2, z)$$

assim se $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, tem-se

$$x + 1 = -1$$

$$y - 2 = 2$$

$$z = 0$$

logo $B = (-2, 4, 0)$.

(b)

(c)

(d)

5. (a) Suponha que $X = (x_1, x_2, x_3)$ é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, portanto tem-se a equação

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

i.e.,

$$(x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

logo tem-se o sistema

$$x_i - a_i = \frac{1}{2}(b_i - a_i), \quad i = 1, 2, 3$$

e a solução é

$$x_i = \frac{1}{2}(b_i + a_i), \quad i = 1, 2, 3$$

- (b) Considerar a equação

$$X = A + \lambda \overrightarrow{AB}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- (c) Considerar a equação

$$X = A + \lambda \overrightarrow{AB}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

6. A equação está determinada por $r : A + t \vec{v}$, onde $t \in \mathbb{R}$

(a)

(b) Uma equação é $r : A + t \vec{v}$, onde $t \in \mathbb{R}$.

Para outra, considere o ponto (x, y, z) da reta, logo da anterior equação tem-se

$$(x, y, z) = (1, 1, -2) + t(4, 0, 1) = (1 + 4t, 1, -2 + t)$$

assim a equação parametrizada da reta é

$$x = 1 + 4t$$

$$y = 1$$

$$z = -2 + t$$

Para mais uma equação simplesmente isole t e substitua na outra equação obtendo a equação da reta

$$x - 4z = 9 \quad \text{e} \quad y = 1$$

(c)

7. Basta ver se $\det A = 0$ ou $\neq 0$ sendo $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$

(a) $\det A \neq 0$ assim nenhum vetor é combinação linear dos outros.

(b) $\vec{u} = -2\vec{v}$

(c) $\det A = 0$

(d)

8. (a) $\pi : A + t \vec{u} + s \vec{v}$.

(b) Buscamos vetor normal do plano como $\vec{n} = \text{vec } u \times \vec{v}$, ou maneira alternativa é seguinte. Seja $(x, y, z) \in \pi$, logo

$$(x, y, z) = A + t \vec{u} + s \vec{v} = (2, 1, 3) + t(1, 1, -2) + s(0, 4, -1)$$

disso

$$x = 2 + t$$

$$y = 1 + t + 4s$$

$$z = 3 - 2t - s$$

isolando t da primeira equação e substituindo nas outras duas tem-se

$$x - y = 1 - 4s$$

$$2x + z = 7 - s$$

similarmente, isolando s tem-se

$$7x + y + 4z = 27$$

(c) Basta tomar $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (7, 1, 4)$

(d) Considere a reta $r : (4, 4, 9) + t(7, 1, 4)$

9. (a) $A \notin \pi$

(b) Considere o vetor normal do plano $\vec{n} = (3, -2, 1)$, logo a reta é

$$r : A + t\vec{n} = (1, 1, 1) + t(3, -2, 1)$$

(c) Notemos que, se $(x, y, z) \in r$, então

$$x = 1 + 3t$$

$$y = 1 - 2t$$

$$z = 1 + t$$

substituindo na equação do plano tem-se

$$3(1 + 3t) - 2(1 - 2t) + 1 + t + 7 = 0$$

$$9 + 14t = 0$$

basta substituir o valor de t em x, y, z e portanto o ponto é

$$B = \frac{1}{14}(-13, 32, 5)$$

- (d) Para que seja paralelo basta tomar o vetor perpendicular $\vec{n}$ e o ponto A , e considerar a equação

$$3(x-1)-2(y-1)+z-1=0$$

10. Considere os vetores normais de cada plano $\vec{n}_\alpha = (3, 1, -2)$ e $\vec{n}_\beta = (1, 4, -8)$ respectivamente. Como eles não são paralelos, assim os planos são concorrentes.

Buscamos 2 pontos na reta r . Claro que $A = (1, -1, 0)$ e $B = (1, 0, -\frac{1}{2})$ os equações dos ambos planos. Agora é fácil encontrar a reta r passando pelos A e B .

11. Paralelos, mas não coincidentes.