

Álgebra I: Prova II

(Modelo A)

1. (2.0 pontos) Resolva

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 1 \pmod{7} \end{cases} .$$

2. (2.0 pontos)

a) (1,0 ponto) Obter o resto da divisão de 7^{1000} por 24;

b) (1,0 ponto) Mostre que $n^{33} - n$ é divisível por 15 para todos n inteiros.

3. (2.0 pontos) Seja p um primo. Mostre que $p \mid a^p + (p-1)!a$ para todos $a \in \mathbb{Z}$.

4. (2.0 pontos) Seja φ a função de Euler e seja $n > 1$ um inteiro tal que $\varphi(n) = n - 1$. Mostre que n é primo.

5. (2.0 pontos) Em \mathbb{Z}_{24} determine

a) todos idempotentes (o elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ chama-se **idempotente** se $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}$);

b) todos os elementos inversos com seus inversos;

c) todos os soluções da equação $\bar{9}x^2 + \bar{12}x + \bar{3} = \bar{0}$.