Álgebra Linear: Prova I. Resolvidos.

1. (a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 & -1 & | & 2 \\ 5 & 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & | & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2/3 & -1/3 & | & 2/3 \\ 5 & 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & | & -1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2/3 & -1/3 & | & 2/3 \\ 0 & -3 & 13/3 & -1/3 & | & -7/3 \\ 0 & -3 & 13/3 & -1/3 & | & -7/3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2/3 & -1/3 & | & 2/3 \\ 0 & 1 & -13/9 & 1/9 & | & 7/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/9 & -4/9 & | & -1/9 \\ 0 & 1 & -13/9 & 1/9 & | & 7/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto o posto é 2.

(c) A solução geral é

$$x = -\frac{1}{9} - \frac{7}{9}z + \frac{4}{9}t$$

$$y = \frac{7}{9} + \frac{13}{9}z - \frac{1}{9}t$$

para quaisquer $z, t \in \mathbb{R}$

2. (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Lembremos que

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A)$$

$$Adj(A) = (Cof(A))^t$$

onde $Cof(A)$ é a matriz dos cofactores de A. Assim,

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} 9-16 & -(3-4) & 4-3 \\ -(9-12) & 3-3 & -(4-3) \\ 12-9 & -(4-3) & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = det\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) - det\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right) + det\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = -1$$

Portanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto temos a base

$$\{(1,0,0,0), (0,2,0,1), (0,0,1,1)\}$$

e a dimensão

$$\dim([S]) = 3.$$

(b) Acrescentemos o vetor $(0,0,0,1)$, podemos provar que o conjunto

$$\{(1,0,0,0),(0,2,0,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$$

é uma base de duas maneiras:

Uma forma seria considerar a combinação linear

$$\lambda_1(1,0,0,0)+\lambda_2(0,2,0,1)+\lambda_3(0,0,1,1)+\lambda_4(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$$

e assim $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

A outra forma seria

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=I_4$$

Logo nosso conjunto é Linearmente independente.

Do anterior e do fato que $\dim(\mathbb{R}^4)=4$ temos que

$$\{(1,0,0,0),(0,2,0,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$$

é uma base.

(c) Claramente não existem $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, tais que $v_1=\lambda_1 v_2$ e $v_3=\lambda_2 v_4$, portanto $\{v_1,v_2\}$ e $\{v_3,v_4\}$ são conjuntos linearmente, portanto

$$\dim(U)=2=\dim(W)$$

Observemos que como

$$\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)$$

e como $U+W=[S]$, então do item (a), temos que

$$\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U+W)=2+2-3=1$$

4. (a) Considere a combinação linear

$$\lambda_1 t^3+\lambda_2(t^2-t)+\lambda_3(t+1)+\lambda_4(2t)=0$$

logo

$$\lambda_1 t^3+\lambda_2 t^2+(-\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_4)t+\lambda_3=0$$

Assim

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$$

logo β é L.I. e como $\dim(P_3(t))=4$, então β é uma base.

(b) Considere a combinação linear

$$\lambda_1 t^3 + \lambda_2(t^2 - t) + \lambda_3(t+1) + \lambda_4(2t) = t^3 + 2t^2 - 3t + 1$$

$$\lambda_1 t^3 + \lambda_2 t^2 + (-\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4)t + \lambda_3 = t^3 + 2t^2 - 3t + 1$$

Assim

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$-\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = -3 \Longrightarrow \lambda_4 = -1$$

$$\lambda_3 = 1$$

daí

$$[t^3 + 2t^2 - 3t + 1]_\beta = (1, 2, 1, -1)$$

(c) Observemos

$$U = \{at + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \left\{at^3 + bt^2 + ct \mid 4a + 2b + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

(d) Observe que

$$U = [t, 1]$$

$$W = \left\{at^3 + bt^2 + (-4a - 2b)t \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a(t^3 - 4t) + b(t^2 - 2t) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

$$W = [t^3 - 4t, t^2 - 2t]$$

$$U \cap W = \{at + b \mid a, b \in \mathbb{R}\} \cap \left\{at^3 + bt^2 + ct \mid 4a + 2b + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}\right\} = 0$$

$$U + W = [t, 1, t^3 - 4t, t^2 - 2t] = P_3(t)$$

Portanto as bases são:

Para U

$$\{t, 1\}$$

Para W

$$\left\{t^3 - 4t, t^2 - 2t\right\}$$

Para $U \cap W$ não existe e para $U + W$

$$\left\{t, 1, t^3 - 4t, t^2 - 2t\right\}$$

5. (a) Falsa. Considere as matrizes $A = I_n$ e $B = -I_n$, as quais são invertiveis, mas

$$A + B = 0$$

a qual não é invertivel.

(b) Falsa. $A = \{(1,0)\}$ e $B = \{(2,0)\}$ são dois conjuntos l.i. em $\mathbb{R}^2$, mas $A \cap B = \{(1,0),(2,0)\}$ é um conjunto l.d.

(c) Verdadeira. Pois para qualquer matriz A de ordem $n \times m$

$$\text{posto}(A) \leq \min\{n, m\}.$$

(d) Verdadeiro.

(e) Falsa. Note que

$$(1,1,1) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x + y \leq 0\}$$

mas

$$-(1,1,1) = (-1,-1,-1) \notin \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x + y \leq 0\}$$