Álgebra Linear: Prova I. Resolvidos.

1. (a) Claramente $t \neq 1$ para que A_t seja inversível. A matriz escalonada é

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & t^2 & t \\ t & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & t^2-t & t-1 \\ 0 & 1-t^2 & 2-t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1-t^2 & 2-t \\ 0 & t^2-t & t-1 \end{bmatrix} \overset{t\neq\pm1}{\to} \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2-t}{1-t^2} \\ 0 & t^2-t & t-1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{t(2-t)}{1-t^2} \\ 0 & 1 & \frac{2-t}{1-t^2} \\ 0 & 0 & t-1-(t^2-t)\frac{2-t}{1-t^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{t(2-t)}{1-t^2} \\ 0 & 1 & \frac{2-t}{1-t^2} \\ 0 & 0 & \frac{-1+2t}{1+t} \end{bmatrix} \overset{t\neq1/2}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-\frac{t(2-t)}{1-t^2} \\ 0 & 1 & \frac{2-t}{1-t^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto para $t \neq \pm1, 1/2$ a matriz A_t é invertível. Analizemos esses casos separadamente. Se $t = -1$, temos

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo A_{-1} é invertível e se $t = 1/2$, temos

$$A_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a qual não é invertível pois a terceira coluna é multiplo da segunda coluna.

(b) Como a matriz é invertível para $t \neq 1, 1/2$, então o sistema tem solução única para $t \neq 1, 1/2$.

Se $t = 1$, então o sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 2 & | & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto para $t = 1$ o sistema não tem solução.

Se $t = 1/2$, então o sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & | & 2 \\ 1/2 & 1 & 2 & | & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & | & -1 \\ 0 & 3/4 & 3/2 & | & 5/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & -4 \\ 0 & 3/4 & 3/2 & | & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 2 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 11/2 \end{bmatrix}$$

Portanto o sistema não tem solução.

2. (a) Seja $p(t) = \alpha t^3 + \beta t^2 + \delta t + \mu \in S_1 \cap S_2$, logo

$$\alpha - \beta + \delta = 0$$

além disso, existem $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(t) = b_1(t^3 + 2t^2 + t) + b_2(t^2 + t + 1) + b_3 t^3$$

logo

$$\alpha = b_1 + b_3$$

$$\beta = 2b_1 + b_2$$

$$\delta = b_1 + b_2$$

$$\mu = b_2$$

$$0 = \alpha - \beta + \delta = b_1 + b_3 - 2b_1 - b_2 + b_1 + b_2 = b_3$$

disso

$$\alpha = b_1$$

$$\beta = 2b_1 + b_2 \Longrightarrow \beta = 2\alpha + \mu$$

$$\delta = b_1 + b_2 \Longrightarrow \delta = \alpha + \mu$$

$$\mu = b_2$$

Assim

$$p(t) = \alpha t^3 + (2\alpha + \mu)t^2 + (\alpha + \mu)t + \mu = \alpha(t^3 + 2t^2 + t) + \mu(t^2 + t + 1)$$

logo

$$S_1 \cap S_2 \subset [t^3 + 2t^2 + t, t^2 + t + 1]$$

Como

$$t^3 + 2t^2 + t, t^2 + t + 1 \in S_1 \cap S_2$$

então

$$S_1 \cap S_2 = [t^3 + 2t^2 + t, t^2 + t + 1]$$

Claramente

$$\left\{t^3+2t^2+t,\, t^2+t+1\right\}$$

é uma base de $S_1 \cap S_2$ e portanto

$$\dim(S_1 \cap S_2) = 2$$

(b) $p(t) \in S_1$, pois $3-4+1=0$ e $p(t) \in S_2$, pois

$$p(t) = 3(t^3+2t^2+t) - 2(t^2+t+1)$$

(c) Observemos que

$$S_1 = [t^3+t^2,\, t^2+t,\, 1]$$

assim que basta considerar $W = [t^3]$

3. (a) Por teorema temos que $\mathscr{P}_1 = A + S_1$ e $\mathscr{P}_2 = B + S_2$, portanto

$$\mathscr{P}_1 = \left\{(1,2,0,1,1) + \alpha(e_2+e_4) + \beta(e_1+e_3) \;:\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathscr{P}_1 = \left\{(1+\beta, 2+\alpha, \beta, 1+\alpha, 1) \;:\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

Similarmente

$$\mathscr{P}_2 = \left\{(-2,1,0,0,3) + \alpha(e_1-e_2) + \beta(e_3-e_5) \;:\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathscr{P}_2 = \left\{(-2+\alpha, 1-\alpha, \beta, 0, 3-\beta) \;:\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

(b) Claramente não são paralelas pois, se $A = (1,2,0,1,1)$, $C = (2,3,1,2,1)$ em $\mathscr{P}_1$ e $B = (-2,1,0,0,3)$, $D = (-1,0,1,0,2)$ em $\mathscr{P}_2$ e se consideramos $v = \overline{AC} = (1,1,1,1,0)$ e $w = \overline{BD} = (1,-1,1,0,-1)$, temos

$$v \cdot w = 1 \neq 0$$

Também não são concorrentes pois se $\exists v = (x,y,z,w,k) \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$, então usando as equações paramétricas temos que existem $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R}$ tais que

$$1+\beta = x = -2+\alpha'$$

$$2+\alpha = y = 1-\alpha'$$

$$\beta = z = \beta'$$

$$1+\alpha = w = 0$$

$$1 = k = 3-\beta'$$

o qual implica que $2 = \beta = -3$ (Absurdo)

Finalmente temos que as variedades são reversas.

4. (a) $\vec{AB} = (-4, 2, 4)$, $\vec{AC} = (3, -6, 2)$, logo o angulo é

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AB}|}\right) = \arccos\left(-\frac{8}{21}\right)$$

(b) Consideremos o determinante

$$\det\left(\begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -4 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}\right) = 28\hat{\imath} + 20\hat{\jmath} + 18\hat{k}$$

portanto a equação do plano é

$$14x + 10y + 9z = 0$$

(c) Seja $P = (x, y, z)$ o ponto de interseção entre a perpendiculat e a reta que passa por B e C, logo $\vec{AP} = (x-1, y+1, z-1)$ é perpendicular a $\vec{BC} = (7, -8, -2)$ assim

$$0 = \vec{AP}\cdot\vec{BC} = 7(x-1) - 8(y+1) - 2(z-1) = 7x - 8y - 2z - 13 \quad (*)$$

agora, a reta que passa por B e C é

$$r = \{(-3+7t, 1-8t, 5-2t) \; : \; t \in \mathbb{R}\}$$

como $P \in r$, então existe $t \in \mathbb{R}$

$$x = -3 + 7t$$

$$y = 1 - 8t$$

$$z = 5 - 2t$$

e de $(*)$ temos que

$$7(-3+7t) - 8(1-8t) - 2(5-2t) - 13 = 0$$

$$117t - 52 = 0$$

isto implica que $t = \frac{52}{117}$ e assim nosso ponto é

$$P = \left(\frac{13}{117}, \frac{299}{117}, \frac{598}{117}\right)$$

e

$$\vec{AP} = \left(-\frac{104}{117}, \frac{419}{117}, \frac{481}{117}\right)$$

finalmente nossa reta é

$$s = \left\{\left(\frac{13}{117} - \frac{104}{117}t, \frac{299}{117} + \frac{419}{117}t, \frac{481}{117} + \frac{481}{117}t\right)\right\}.$$

5. (a) Verdadeiro, pois caso seja l.d. o conjunto maior seria também l.d.

   (b) Falso.

   (c) Verdadeiro, pois $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

   (d) Falso, considere os subespaços vetoriais $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ do espaço vetoria $\mathbb{R}^2$.

   (e) Falso, pois para cada f não nulo não existe seu inverso.