Álgebra Linear: Prova Sub.

1. (2 pontos) Verifique se o operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (-x + 4y - 2z, -3x + 4y, -3x + y + 3z)$$

é diagonalizável. Em caso afirmativo, encontre base B tal que $[T]_B$ seja diagonal.

2. (2 pontos) Encontre o operador linear T do $\mathbb{R}^2$ tal que $(1, -1)$ e $(1, 2)$ são autovetores associados aos autovalores 1 e 4, respectivamente.

3. (2 pontos) Determinar as projeções ortogonais de $f(t) = t^2 + t + 1 \in P_2(\mathbb{R})$, $g(t) = t - 1 \in P_2(\mathbb{R})$ sobre o subespaço

$$U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2(\mathbb{R}) \mid a_2 = 0, a_0 + a_1 = 0\},$$

em relação ao produto interno usual.

4. (2 pontos) Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = AX + X$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais:

$$\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Im}(T), \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T), \mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T).$$

5. (3 pontos) No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$, considere os subespaços

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a + c = 0,\ b + d = 0 \right\},$$

$$S_2 = \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Determine uma base e dimenção de $S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2$.