Álgebra Linear: Prova II.

1. (2 pontos) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação linear definida por $F(0,1,1) = (0,0,2)$, $F(0,0,1) = (0,0,1)$, $F(1,0,0) = (1,2,0)$. Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais:

$$\text{Ker}(F), \text{Im}(F), \text{Ker}(F) \cap \text{Im}(F), \text{Ker}(F) + \text{Im}(F).$$

2. Sendo $V = M_2(\mathbb{R})$ com produto interno $\langle A, B \rangle = \text{traço}(B^t A)$ e

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a_{11} - a_{22} - a_{21} = 0 \right\}$$

– um subespaço em V.

a) **(1.5 ponto)** Encontre uma base ortonormal para U.

b) **(1 ponto)** Encontre as projeções ortogonais dos matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sobre o subespaço U.

3. Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por, $A(1,0,0) = (2,8,0), A(0,1,0) = (3,4,0), A(0,0,1) = (0,0,2)$.

a) **(1.5 ponto)** Mostre que A é um isomorphismo e determine $A^{-1}(x,y,z)$.

a) **(1 ponto)** Encontre autovalores e autovetores de A.

b) **(1 ponto)** Busca $A^3(1,1,1)$ usando diagonalização.

4.

5. (±1 extra ponto!) (Sendo 0,2 para cada item correto, 0 para cada item sem resposta e -0,2 para cada item errado)

Diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações abaixo:

a) Se matriz de T em algum base de $\mathbb{R}^2$ é simmetrica, assim T é autoadjunto.

b) Se $\text{Ker}(T) = \{0\}$ assim T é sempre diagonalizavel.

c) Se $\|u + v\| = 5$, $\|u\| = 3$ e $\|v\| = 4$ assim u e v são ortogonais.

d) Espaços $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ e $V = \{p \in P_4(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$ são isomorfos.

e) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e $\dim V \geq \dim W$ assim T é sempre sobrejetora.