Álgebra Linear: Prova II.

1. (2 pontos) Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\text{Ker}(T) = [(1,1,0),(0,1,-1)], \qquad \text{Im}(T) = [(1,1)].$$

2. Sendo $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual e U é um plano em V dado por

$$U = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\Big\}$$

a) **(1 ponto)** Encontre uma base ortonormal para U.

b) **(1 ponto)** Encontre as projeções ortogonais dos vetores $v_1 = (4,3,5), v_2 = (1,1,1)$ sobre o subespaço U.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por matriz,

$$(T)^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

em relação as duas bases $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,1,0)\}$, $C = \{(1,3,5),(0,4,4),(0,3,5)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

a) **(1 ponto)** Mostre que $T(x,y,z) = (x, 3y+z, 5y-z)$ e determine $T^{-1}(x,y,z)$.

b) **(1 ponto)** Encontre autovalores e autovetores de T.

4. Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por, $A(1,1) = (15,7), A(1,0) = (12,a)$.

a) **(1 ponto)** Mostre que A é auto-adjunto se o somente se $a = 3$.

b) **(1 ponto)** Mostre que A é positivo (se $a = 3$) e busca raiz quadrada de matriz da A em base canônica.

5. (2 pontos) Discutir em termos dos valores de λ a cônica de equação:

$$\lambda x^2 + 2xy + \lambda y^2 + 2x + 2y = -2.$$

($\pm$1 extra ponto!) (Sendo 0,2 para cada item correto, 0 para cada item sem resposta e -0,2 para cada item errado)

Diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações abaixo:

a) Se matriz A é inversivel assim $\lambda = 0$ é autovalor da A.

b) Se $\|u - v\| = 10$, $\|u\| = 6$ e $\|v\| = 8$ assim u e v são sempre ortogonais.

c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ é equação da uma elipse.

d) Espaçõs $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ e $V = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(2) = 0\}$ são isomorfos.

e) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e $\dim V \leq \dim W$ assim T é sempre injetora.

$\delta > 0$	$\triangle \neq 0$	$s\triangle < 0$: elipse
		$s\triangle > 0$: vazio
	$\triangle = 0$	Um ponto
$\delta < 0$	$\triangle \neq 0$	Hipérbole
	$\triangle = 0$	Duas retas concorrentes
$\delta = 0$	$\triangle \neq 0$	Parabola
	$\triangle = 0$	Duas retas

Tabela 1: Cônicas