Álgebra Linear: Prova I.

1. **(2.0 ponto)** Dado o sistema linear

$$\begin{cases} 3x & + & 3y & - & 2z & - & t & = & 2 \\ 5x & + & 2y & + & z & - & 2t & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & - & t & = & -1 \end{cases}.$$

a) Escreva o sistema acima na forma matricial $AX = B$.

b) Qual é o posto da matriz A desse sistema linear?

c) Determine a solução geral desse sistema.

2. Dada uma matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ busca A^{-1} usando:

a) **(0.5 ponto)** operações elementares;

b) **(0.5 ponto)** determinante e a matriz adjunta.

3. Considere o subconjunto $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ em $\mathbb{R}^4$, com $v_1 = (1, 2, 0, 1), v_2 = (1, 0, 3, 3), v_3 = (0, 2, -1, 0), v_4 = (1, 0, 0, 0)$.

a) **(1 ponto)** Encontre uma base para o subespaço gerado por S e calsule sua dimenção.

b) **(1 ponto)** Complete a base encontrada acima a uma base para $\mathbb{R}^4$.

c) **(1 ponto)** Seja U o subespaço gerado por $\{v_1, v_2\}$ e W o subespaço gerado por $\{v_3, v_4\}$. Verefique que $\dim(U) = \dim(W) = 2$ e use isto em conjunto com o item a) para calcular $\dim(U \cap W)$ **sem** calcular $U \cap W$.

4. Seja $V = P_3(t)$ o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor ou igual a 3.

a) **(1 ponto)** Verefique que $\beta = \{t^3, t^2 - t, t + 1, 2t\}$ é uma base em $P_3(R)$.

b) **(1 ponto)** Encontre as coordenadas de $p(t) = t^3 + 2t^2 - 3t + 1$ em base β.

c) **(0.5 ponto)** Sejam $U = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $W = \{p \in P_3(R) \mid p(0) = p(2) = 0\}$. Prove que U e W são subespaços vetoriais de $P_3(\mathbb{R})$.

d) **(1.5 ponto)** Encontre uma base para U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

5. (1 extra ponto!) (Sendo 0,2 para cada item correto, 0 para cada item sem resposta e -0,2 para cada item errado)

Diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações abaixo:

a) A soma de matrizes invertíveis é sempre uma matriz invertível.

b) A união de conjuntos *l.i.* é um conjunto *l.i.*

c) As colunas de uma matriz A, 5×7, são vetores *l.d.*

d) Se $\{u, v, w\}$ é *l.i.* então $\{u - v, v - w, u - w\}$ é *l.i.*

e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \leq 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.