Lista 8. Gabaritos

Operadores auto-adjuntos.

1. Temos $(A + A^t)^t = A^t + A = A + A^t$ assim $A + A^t$ é simetrica.

   Temos $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$ assim AA^t é simetrica.

2. a) $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = 1$ — autovalores. $\tilde{u}_1 = (-1, 1)$, $\tilde{u}_2 = (1, 1)$ são autovetores correspondentes. Ortonormalizando deles obtemos $u_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $u_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ — uma base ortonormal de autovetores de A em $\mathbb{R}^2$.

   b) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$ — autovalores. $\tilde{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\tilde{u}_2 = (0, 1, 0)$, $\tilde{u}_3 = (-1, 0, 1)$ são autovetores correspondentes. Ortonormalizando deles obtemos $u_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $u_2 = (0, 1/\sqrt{2}, 0)$, $u_3 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ — uma base ortonormal de autovetores de A em $\mathbb{R}^3$.

   c) $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 1$ — autovalores. $\tilde{u}_1 = (5, 4, 3)$, $\tilde{u}_2 = (-5, 4, 3)$, $\tilde{u}_3 = (0, 3, 4)$ são autovetores correspondentes. Ortonormalizando deles obtemos $u_1 = (\frac{5}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{3}{\sqrt{50}})$, $u_2 = (-\frac{5}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{3}{\sqrt{50}})$, $u_3 = (0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ — uma base ortonormal de autovetores de A em $\mathbb{R}^3$.

3. É facil ver que $A(1, 0, 0) = \frac{2}{9}(5, -1, -1) + \frac{2}{9}(-1, 5, -1) - \frac{1}{9}(-1, -1, 5) = (1, 1, -1)$, $A(0, 1, 0) = \frac{2}{9}(5, -1, -1) - \frac{1}{9}(-1, 5, -1) + \frac{2}{9}(-1, -1, 5) = (1, -1, 1)$, $A(0, 0, 1) = -\frac{1}{9}(5, -1, -1) + \frac{2}{9}(-1, 5, -1) + \frac{2}{9}(-1, -1, 5) = (-1, 1, 1)$. Assim matriz do A tem forma

$$(A)_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Essa matriz é simetrica assim A é autoadjunto.

4. Seja matriz da A em base canonica dado por

$$(A)_{can} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

   Assim temos que

$$\begin{cases} a_{11} + a_{22} + a_{33} &= 5 \\ 2a_{11} - a_{12} - 2a_{13} &= 1 \\ 2a_{12} - a_{22} - 2a_{23} &= -2 \\ 2a_{13} - a_{23} - 2a_{33} &= 12 \\ 3a_{11} - 6a_{12} - 6a_{13} &= 3 \\ 3a_{12} - 6a_{22} - 6a_{23} &= 21 \\ 3a_{13} - 6a_{23} - 6a_{33} &= 33 \end{cases}$$

   Resolvendo o sistema obtemos

$$(A)_{can} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -3 & \frac{4}{3} & -\frac{19}{3} \\ 4 & -\frac{19}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

5. Se A é autoadjunto e $u \in \text{Ker}(A)$, $v \in \text{Im}(A)$ assim temos que

$$\langle u, v\rangle = \langle u, A(w)\rangle = \langle A(u), w\rangle = \langle 0, w\rangle = 0,$$

   ou seja u, v são ortogonais e $\text{Ker}(A) = \text{Im}(A)^{\perp}$. Agora se $A^k(v) = 0$ e $k > 1$ assim $A^{k-1}(v) \in \text{Ker}(A)$ por outra lado é claro que $A^{k-1}(v) \in \text{Ker}(A)$ assim $A^{k-1}(v) = 0$. Pelo indução temos que $A(v) = 0$.

6. Para qualquerem dois vetores $v, u \in V$ temos

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(\langle u+v, u+v\rangle - \langle u, u\rangle - \langle v, v\rangle)$$

Assim

$$\langle A(u), v\rangle = \frac{1}{2}(\langle A(u+v), u+v\rangle - \langle A(u), u\rangle - \langle A(v), v\rangle) =$$

$$= \frac{1}{2}(\langle B(u+v), u+v\rangle - \langle B(u), u\rangle - \langle B(v), v\rangle) = \langle B(u), v\rangle$$

Ou seja $A = B$.

7. Autovalores de A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$. Eles são positivos, assim A é positiva. Autovetores correspondentes são $u_1 = (1, 1)$ e $u_2 = (-1, 1)$. Assim temos

$$\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$$

8. Seja $B = I + (\sqrt{\alpha+1} - 1)P$. Claro que B é positivo (pois I e $(\sqrt{\alpha+1} - 1)P$ são positivos. Agora temos que

$$B^2 = \big(I + (\sqrt{\alpha+1} - 1)P\big)\big(I + (\sqrt{\alpha+1} - 1)P\big) = I + 2(\sqrt{\alpha+1} - 1) + (\sqrt{\alpha+1} - 1)^2 P = I + \alpha P$$

Assim B é raiz quadrada de $I + \alpha P$.

Cônicas

1. (a) Como $4 > \sqrt{7}$, então os focos são $(\pm c, 0)$, onde $c^2 = 16 - 7 = 9$ e sua excentricidade é $\epsilon = \frac{c}{4} = \frac{3}{4}$.

   (b) Similarmente, como $5 > \sqrt{21}$, então os focos são $(\pm 2, 0)$ e sua excentricidade é $\epsilon = \frac{2}{5}$

   (c) Como $\sqrt{6} < \sqrt{15}$, então os focos são $(0, \pm c)$, onde $c^2 = 15 - 6 = 9$ e sua excentricidade é $\epsilon = \frac{3}{\sqrt{15}}$

   (d) Similarmente, como $2 < 3$, então os focos são $(0, \pm\sqrt{5})$ e sua excentricidade é $\epsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$

2. Como $5 > 2$, então os focos são $(\pm\sqrt{21}, 0)$, e portanto o triângulo formado pelos focos e o ponto $(0, 4)$ tem altura $h = 4$ e base $b = 2\sqrt{21}$, assim

$$A_\Delta = 4\sqrt{21}.$$

3. (a) Quando $x = 0$, temos a elipse

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

   Quando $y = 0$, temos a parábola

$$x - \frac{z^2}{9} = 1 \Longrightarrow z^2 = 9x.$$

   Quando $z = 0$, temos a parábola

$$x - \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow y^2 = 4x$$

(b) Observe que é uma parábola aberta à direita com foco $\left(\frac{5}{4},0\right)$, directriz $x=\frac{5}{4}$ e vértice $V(0,0)$.

4. (a) A excentricidade é $\epsilon=\frac{c}{2}$, onde $c^2=4+1=5$ e as assíntotas são $y=\pm\frac{1}{2}x$

(b) A excentricidade é $\epsilon=\sqrt{5}$ e as assíntotas são $y=\pm\frac{1}{2}x$

(c) A excentricidade é $\epsilon=\frac{\sqrt{13}}{2}$ e as assíntotas são

$$y+1=\pm\frac{3}{2}(x-1)$$

5. (a) Calculando o discriminante de $2xy+3x-y+1=0$, temos

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=-\frac{5}{2}\neq 0$$

e como $\delta=-1<0$, então curva é uma hipérbole.

(b) O discriminante de $4x^2-24xy+11y^2+56x-58y+95=0$ é

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}4 & -12 & 28\\ -12 & 11 & -29\\ 28 & -29 & 95\end{pmatrix}=-2000\neq 0$$

e como $\delta=4(11)-(-12)^2<0$, então a curva é uma hipérbole

(c) O discrimante é

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}6 & -2 & -2\\ -2 & 9 & -16\\ -2 & -16 & -6\end{pmatrix}=-2000<0$$

e como $\delta=6(9)-(-2)^2>0$, então é uma elipse

(d) O discrimante é

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}16 & -17 & -\frac{19}{2}\\ -17 & 9 & -\frac{17}{2}\\ -\frac{19}{2} & -\frac{17}{2} & 11\end{pmatrix}<0$$

e como $\delta=16(9)-(-17)^2<0$, então é uma hipérbole.

(e) O discrimante é

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}4 & -10 & 2\\ -10 & 25 & -5\\ 2 & -5 & 1\end{pmatrix}=0$$

e como $\delta=4(25)-(-10)^2=0$, então são duas retas paralelas ou coincidentes.

(f) O discrimante é

$$\Delta=\det\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}>0$$

e como $\delta=1(1)-(-\frac{1}{2})^2\neq 0$, então é uma parábola.

6. (a) Como a curva é $x^2+4xy-2y^2=6$, então consideremos a rotação de eixos θ, onde

$$\tan 2\theta=\frac{4}{1+2}$$

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4}{3}$$
$$2\tan^2\theta + 3\tan\theta - 2 = 0$$
$$\tan\theta = -2\ ,\ \frac{1}{2}$$

adotando a solução positiva $\tan\theta = \frac{1}{2}$, temos

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = \frac{5}{4}$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Assim

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Portanto as formulas de rotação de eixos é

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'$$

Substituindo na equação dada temos

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'\right)^2 + 4\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x' - \frac{\sqrt{5}}{5}y'\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'\right) - 2\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x' + \frac{2\sqrt{5}}{5}y'\right)^2 = 6$$

e assim

$$\frac{4}{5}x'^2 - \frac{4}{5}x'y' + \frac{1}{5}y'^2 + \frac{8}{5}x'^2 + \frac{16}{5}x'y' - \frac{4}{5}x'y' - \frac{8}{5}y'^2 - \frac{2}{5}x'^2 - \frac{8}{5}x'y' - \frac{8}{5}y'^2 = 6$$

$$2x'^2 - 3y'^2 = 6$$

$$\frac{x'^2}{3} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

(b) Similar ao item anterior

(c) Observe que nos itens anteriores tomamos las equações de rotação de eixos, neste item antes de fazer isso, primeiro tomamos las equações de translação de eixos.

7. (a) Como $\delta = \lambda^2 - 1$ e o discrimimante é

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3\lambda^2 - 2\lambda - 1 = (3\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

então temos que a equação

- Vazia $\iff \delta > 0$ e $\Delta > 0 \iff \lambda \in \mathbb{R} - [-1, 1]$

- Hipérbole $\iff \delta < 0$ e $\Delta \neq 0 \iff \lambda \in (-1,1) - \{-\frac{1}{3}\}$
- Duas retas concorrentes $\iff \delta < 0$ e $\Delta = 0 \iff \lambda = -\frac{1}{3}$
- Parábola $\iff \delta = 0$ e $\Delta \neq 0 \iff \lambda = -1$
- Duas retas paralelas ou coincidentes $\iff \delta = 0$ e $\Delta = 0 \iff \lambda = 1$

(b) Como $\delta = \lambda - 1$ e o discrimimante é

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -5\lambda + 4$$

então temos que a equação determina

- Elipse $\iff \delta > 0$ e $\Delta < 0 \iff \lambda > 1$
- Hipérbole $\iff \delta < 0$ e $\Delta \neq 0 \iff \lambda \in (-\infty,1) - \{\frac{4}{5}\}$
- Duas retas concorrentes $\iff \delta < 0$ e $\Delta = 0 \iff \lambda = \frac{4}{5}$
- Parábola $\iff \delta = 0$ e $\Delta \neq 0 \iff \lambda = 1$