Lista 8

Operadores auto-adjuntos.

1. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz. Mostre que os matrizes $A + A^t, AA^t, A^tA$ são simmetricais.

2. Busca as bases orthonormais de V de autovetores de A:

   a) $V = \mathbb{R}^2$,
   $$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

   b) $V = \mathbb{R}^3$,
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) $V = \mathbb{R}^3$,
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Dados vetores $u = (4, 4, -2)$, $v = (4, -2, 4)$, $w = (1, -2, -2)$, seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $A(u) = (10, -2, -2)$ $A(v) = (-2, 10, -2)$, $A(w) = (1, 1, -5)$. Prove que A é auto-adjunto.

4. Dados vetores $u = (2, -1, -2)$, $v = (3, -6, -6)$ determine o operador auto-adjunto $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A(u) = (1, 1, 13)$ $A(v) = (3, 21, 33)$, sabendo que o traço (=soma de todos autovalores) de A é 5.

5. Seja A auto-adjunto. Prove que $A^k(v) = 0$ implica que $A(v) = 0$.

6. Sejam $A, B : V \to V$ operadores auto-adjuntos tais que $\langle A(v), v\rangle = \langle B(v), v\rangle$ para todo vetor $v \in V$. Prove que $A = B$.

7. Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ é positiva. Busca raiz quadrada de A.

8. Sejam P uma projeção ortogonal e $\alpha > 0$.
   Exprima a raiz quadrada positiva de $I + \alpha P$ em termos de P.

Cônicas.

1. Determine os focos e as excentricidades das elipses:

   (a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$,

   (b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$,

   (c) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{15} = 1$,

   (c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

2. Ache a área do triângulo formado por os focos da elipse
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1,$$
e ponto $(0, 4)$.

3. Considere a quádrica de equação:
$$x - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$
   (a) Determine as intersecções da superfície com os planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ identificando as curvas obtidas.
   (b) Esboce a cônica dada pela intersecção da superfície com o plano $z = 0$ e identifique seu(s) foco(s).

4. Determine as excentricidades e as assíntotas das hipérboles:
   (a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1,$
   (b) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1,$
   (c) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$

5. Identifique as seguintes curvas de segundo grau:
   (a) $2xy + 3x - y + 1 = 0;$
   (b) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0;$
   (c) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0;$
   (d) $16x^2 - 34xy + 9y^2 - 19x - 17y + 11 = 0;$
   (e) $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0;$
   (f) $x^2 + y^2 + xy - x + 1 = 0.$

6. Ache as equações canônicas de:
   (a) $x^2 + 4xy - 2y^2 = 6;$
   (b) $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1;$
   (c) $x^2 + y^2 - 2xy + x = 1.$

7. Distutir, em termos dos valores de λ, as cônicas de equação:
   (a) $\lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 2x + 2y + 3 = 0;$
   (b) $x^2 - 2xy + \lambda y^2 + 2x = 4.$