Lista 7. Gabaritos

Autovalores e Autovetores.

1. Temos $p_\lambda(T) = \lambda^2 - 2$, assim $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}$ são autovalores e $u_1 = (1+\sqrt{2}, 1)$ e $u_2 = (1-\sqrt{2}, 1)$ são autovetores correspondentes.

2. Neste caso é facil ver que os polinomios caracteristicos são $p_\lambda(A) = p_\lambda(B) = (\lambda - a_{11}) \dots (\lambda - a_{nn})$.

3. Se λ é autovalor do T assim existe um vetor não-nulo u tal que $T(u) = \lambda u$. Assim teremos
$$T^n(u) = T^{n-1}(T(u)) = \lambda T^{n-1}(u) = \lambda^2 T^{n-2}(u) = \dots = \lambda^n u.$$
Assim λ^n é autovalor de T^n com autovetor correspondente u.

4. Temos que em base canônica a matrix da T tem forma
$$(T)_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Assim temos
$$(T^{10})_{can}(5,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^9} + 3 \cdot 2^{10} \\ -\frac{1}{2^9} + 3 \cdot 2^{10} \end{pmatrix}.$$

5. Se λ é autovalor do T assim existe um vetor coluna não-nulo u tal que $A(u) = \lambda u$. Assim $A^{-1}(\lambda u) = u$, ou equivalente $A^{-1}(u) = \lambda^{-1} u$ e λ^{-1} é autovalor da A.

6. a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. E $u_1 = (5,1,1)$, $u_2 = (1,0,0)$, $u_3 = (-1,-3,3)$.
   b) $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. E $u_1 = (5,-1,2)$, $u_2 = (1,0,0)$, $u_3 = (0,1,0)$.

Diagonalização.

1. a) Não, por exemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   b) Não, por exemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   c) Sim;
   d) Sim, pois existe vetor não nulo u tal que $A(u) = 0 \cdot u$;
   e) Sim, se existir $S \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = SBS^{-1}$ assim temos que $A^k = SB^kS^{-1}$.

2. A matriz de T em base canônica tem forma
$$(T)_{can} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Temos que $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$ são autovalores de A e $u_1 = (-1,1,0)$, $u_2 = (0,0,1)$, $u_3 = (1,1,0)$ são autovetores correspondentes. T tem três autovalores $\lambda = 0, 2, -2$ e multiplicidades algebricas deles são iguais a multiplicidades geometricas assim T é diagonalizavel.

3. $p_\lambda(A) = (1-\lambda)^2$. Assim temos $\lambda = 1$ é autovalor com multiplicidade algebrica 2. Agora facil ver que seu multiplicidade geometrica, isto é $\dim V_1$, é 2 se e só se $c \neq 0$.

4. a) Se $A^2 = A$ assim $A^2(u) = A(u)$ e se λ é autovalor temos que $\lambda^2 = \lambda$ ou $\lambda = 0, 1$.

   b) Se A é diagonalizavel e todos autovalores são 0 ou 1 assim existe uma matriz inversivel S tal que $A = S \cdot \text{diag}\{0, \dots, 0, 1 \dots, 1\} \cdot S^{-1}$. Portanto $A^2 = S \cdot \text{diag}\{0^2, \dots, 0^2, 1^2 \dots, 1^2\} \cdot S^{-1} = A$

5. a) Se $A^{-1} = A$ e λ é autovalor de A assim $\lambda = \frac{1}{\lambda}$ (veja Ex.5 nesta lista) assim $\lambda = \pm 1$.

6. Temos $p_\lambda(A) = (a-\lambda)(c-\lambda)(1-\lambda)$. Assim A tem autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a, \lambda_3 = c$.

   Em caso $a \neq c \neq 1$ claro que A é diagonalizavel para qualquer b.

   Em caso $a = c = 1$ temos que A não é diagonalizavel para qualquer b, pois multiplicação algebrica de $\lambda = 1$ é 3 mas $\dim V_1 = 2$.

   Em caso $a = 1, c \neq 1$ temos que A não é diagonalizavel para qualquer b, pois multiplicação algebrica de $\lambda = 1$ é 2 e $\dim V_1 = 1$ para qualquer b.

   Em caso $a \neq 1, c = 1$ temos que A é diagonalizavel para qualquer b, pois multiplicação algebrica de $\lambda = 1$ é 2 e $\dim V_1 = 2$ para qualquer b.

7. a) Não, pois $p_T(\lambda) = \lambda^4 - 1$ possui os raizes complexas.

   b) Não, pois multiplicidade algebrica de $\lambda = 0$ é 2 e multiplicidade geometrica de $\lambda = 0$ é 3.

   c) Sim. T tem três autovalores $\lambda = 0, 2, -2$ e multiplicidades algebricas deles são iguais a multiplicidades geometricas.

8. Temos que $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$ são autovalores de A e $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 1, 0)$ são autovetores correspondentes. Assim A escreva-se como $A = S \cdot \text{diag}\{2, 1, 0\} \cdot S^{-1}$ com

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Portanto temos

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0^{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. a). Autovalores $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$, autovetores correspondentes $u_1 = (0, 1, 0)$, $u_2 = (-5, 0, 4)$, $u_3 = (-1, 0, 1)$. Assim A escreva-se como $A = S \cdot \text{diag}\{-5, 0, 4\} \cdot S^{-1}$ com

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   b). Autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$, autovetores correspondentes $u_1 = (4, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$, $u_3 = (2, 1, 1)$. Assim A escreva-se como $A = S \cdot \text{diag}\{-5, 0, 4\} \cdot S^{-1}$ com

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2$, autovetores correspondentes $u_1 = (2,1,0)$, $u_2 = (-1,2,0)$, $u_3 = (0,0,1)$. Os autovetores u_1, u_2, u_3 formam uma base ortogonal em $\mathbb{R}^3$, nesta base a matrix da A é $(A)_B = \mathrm{diag}\{3,-2,2\}$. Tomando matriz M como

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que $M^{-1} = M^t$ e $M^t A M = \mathrm{diag}\{3,-2,2\}$.

11. a). Autovalores $\lambda_1 = 4(1+\sqrt{3})$, $\lambda_2 = 4(1-\sqrt{3})$, $\lambda_3 = -2$, autovetores correspondentes $u_1 = (4(1+\sqrt{3}), 4-4\sqrt{3}, -2)$, $u_2 = (4(1+\sqrt{3}), -4(\sqrt{3}-1), -2)$, $u_3 = (-1,0,3)$. u_1, u_2, u_3 são l.i. assim eles formam uma base em $\mathbb{R}^3$. Mas eles não são ortogonais.

12. a) Sejam $v_n = \begin{pmatrix} L_n \\ L_{n+1} \end{pmatrix}$, $n = 0, \dots$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Assim temos que $v_n = A^n \cdot v_0$. Por outra lado A pode ser escrito como

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_2 & -\varphi_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 & -\varphi_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

com $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim

$$A^n = \begin{pmatrix} -\varphi_2 & -\varphi_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^n & 0 \\ 0 & \varphi_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 \\ -1 & -\varphi_2 \end{pmatrix}$$

Temos

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\varphi_2 & -\varphi_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^n & 0 \\ 0 & \varphi_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 \\ -1 & -\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^n + \varphi_2^n \\ \varphi_1^{n+1} + \varphi_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Portando $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

b) Faz na mesma maneira considerando $v_n = \begin{pmatrix} J_n \\ J_{n+1} \end{pmatrix}$, e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.