

Lista 7

Autovalores e Autovetores.

1. Achar os autovalores e os autovetores operador T do \mathbb{R}^2 dado por $T(x, y) = (x + y, x - y)$.
2. Sejam A e B matrizes triangulares com a mesma diagonal principal $a_{ii} = b_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Prove que $p_\lambda(A) = p_\lambda(B)$.
3. Provar que se λ é autovalor de T , então λ^n é autovalor de T^n . Generalizando, se $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_n t^n$ é um polinômio então $p(\lambda)$ é valor próprio de $p(T)$, onde $p(T) = a_0 Id + a_1 T + \dots + a_n T^n$.
4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear com autovetores $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (1, 1)$ correspondendo respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2$. Seja $v = (5, 1)$. Calcule $T^{10}(v)$.
5. Seja A uma matriz inversível. Se λ é autovalor de A , mostre que $\lambda \neq 0$ e que $\frac{1}{\lambda} \neq 0$ é autovalor A^{-1} . Mostre que todo autovalor μ de A^{-1} tem a forma $\mu = \frac{1}{\lambda}$, onde λ é algum autovalor de A .
6. Achar os autovalores e os autovetores de operador linear T do \mathbb{R}^3 dado por:
 - a) $T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$;
 - b) $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (5, -1, 2)$.

Diagonalização.

1. Em cada caso, ou mostre que a sentença é verdadeira ou dê exemplo mostrando que ela é falsa:
 - a) Se A possui autovalores reais, então ela é diagonalizável;
 - b) Se A é diagonalizável, então ela possui autovalores distintos;
 - c) Se A é diagonalizável, então sua transposta A^t também é diagonalizável;
 - d) Se A não tem inversa, então $\lambda = 0$ é autovalor de A ;
 - e) Se $A \sim B$, então $A^k \sim B^k$, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ($A \sim B$ se existir $S \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = SBS^{-1}$).
2. Sendo $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ e $C = \{(0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ bases de \mathbb{R}^3 . Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$(T)_C^B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontre os autovetores e autovalores T . É T diagonalizável?

3. Mostre que $A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ não é diagonalizável a menos que $c = 0$.
4.
 - a) $A^2 = A$ e λ é autovalor de A , mostre que $\lambda = 0, 1$.
 - b) Se A é diagonalizável e todos autovalores são 0 ou 1, mostre que $A^2 = A$.
5.
 - a) Se $A^{-1} = A$ e λ é autovalor de A , mostre que $\lambda = \pm 1$.

b) Se A é diagonalizável e todos autovalores são -1 ou 1 , mostre que $A^{-1} = A$.

6. Considere a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine todos os valores de a, b e c para os quais A é diagonalizável.

7. Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma transformação linear com polinômio característico indicado por $p_T(\lambda)$. Verifique se T é diagonalizável em cada um dos seguintes casos:

a) $p_T(\lambda) = \lambda^4 - 1$

b) $p_T(\lambda) = \lambda^3(\lambda + 1)$ e $\dim \text{Ker}(T) = 2$.

c) $p_T(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$ e $\dim \text{Ker}(T) = 2$.

8. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule A^{20} . Ache matrizes D e S tais que D é diagonal e $S^{-1}AS = D$.

9. Em cada caso, encontre o polinômio característico, autovalores e autovetores e, se possível, encontre uma matriz inversível S tal que $S^{-1}AS$ é diagonal

a). $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. b). $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

10. Seja A o operador linear cuja matriz relativa á base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Achar os autovalores de A . Achar uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 em relação à qual matriz A é diagonal. Achar uma matriz M tal que $M^{-1} = M^t$ tal que M^tAM é a matriz diagonal.

11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (4x + 4y + 2z, 6x + 2z, 12x + 4y + 2z)$. Ache uma base de \mathbb{R}^3 com produto interno usual mostre que não existe uma base ortogonal formada de autovetores de T .

12. Busca a formula geral para os numeros:

a) $L_0 = 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ — Numeros de Lucas.

b) $J_0 = 1, J_1 = 2, J_n = 2J_{n-1} + 3J_{n-2}$.

c*) $T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 2, T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ — Tribonacci numeros.