Lista 5. Gabaritos

Autovalores e Autovetores.

1. Temos $p_\lambda(T) = \lambda^2 - 2$, assim $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}$ são autovalores e $u_1 = (1 + \sqrt{2}, 1)$ e $u_2 = (1 - \sqrt{2}, 1)$ são autovetores correspondentes.

2. Neste caso é facil ver que os polinomios caracteristicos são $p_\lambda(A) = p_\lambda(B) = (\lambda - a_{11}) \dots (\lambda - a_{nn})$.

3. Se λ é autovalor do T assim existe um vetor não-nulo u tal que $T(u) = \lambda u$. Assim teremos
$$T^n(u) = T^{n-1}(T(u)) = \lambda T^{n-1}(u) = \lambda^2 T^{n-2}(u) = \cdots = \lambda^n u.$$
Assim λ^n é autovalor de T^n com autovetor correspondente u.

4. Temos que em base canônica a matrix da T tem forma
$$(T)_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Assim temos
$$(T^{10})_{can}(5,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^9} + 3 \cdot 2^{10} \\ -\frac{1}{2^9} + 3 \cdot 2^{10} \end{pmatrix}.$$

5. Se λ é autovalor do T assim existe um vetor coluna não-nulo u tal que $A(u) = \lambda u$. Assim $A^{-1}(\lambda u) = u$, ou equivalente $A^{-1}(u) = \lambda^{-1} u$ e λ^{-1} é autovalor da A.

6. a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. E $u_1 = (5, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 0)$, $u_3 = (-1, -3, 3)$.
   b) $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. E $u_1 = (5, -1, 2)$, $u_2 = (1, 0, 0)$, $u_3 = (0, 1, 0)$.

Diagonalização.

1. a) Não, por exemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   b) Não, por exemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   c) Sim;
   d) Sim, pois existe vetor não nulo u tal que $A(u) = 0 \cdot u$;
   e) Sim, se existir $S \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = SBS^{-1}$ assim temos que $A^k = SB^kS^{-1}$.

2. A matriz de T em base canônica tem forma
$$(T)_{can} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Temos que $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$ são autovalores de A e $u_1 = (-1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$ são autovetores correspondentes. T tem três autovalores $\lambda = 0, 2, -2$ e multiplicidades algebricas deles são iguais a multiplicidades geometricas assim T é diagonalizavel.

3. $p_\lambda(A) = (1-\lambda)^2$. Assim temos $\lambda = 1$ é autovalor com multiplicidade algebrica 2. Agora facil ver que seu multiplicidade geometrica, isto é $\dim V_1$, é 2 se e só se $c \neq 0$.

4. a) Se $A^2 = A$ assim $A^2(u) = A(u)$ e se λ é autovalor temos que $\lambda^2 = \lambda$ ou $\lambda = 0, 1$.

   b) Se A é diagonalizavel e todos autovalores são 0 ou 1 assim existe uma matriz inversivel S tal que $A = S \cdot \text{diag}\{0, \dots, 0, 1 \dots, 1\} \cdot S^{-1}$. Portanto $A^2 = S \cdot \text{diag}\{0^2, \dots, 0^2, 1^2 \dots, 1^2\} \cdot S^{-1} = A$

5. a) Se $A^{-1} = A$ e λ é autovalor de A assim $\lambda = \frac{1}{\lambda}$ (veja Ex.5 nesta lista) assim $\lambda = \pm 1$.

6. Temos $p_\lambda(A) = (a-\lambda)(c-\lambda)(1-\lambda)$. Assim A tem autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a, \lambda_3 = c$.

   Em caso $a \neq c \neq 1$ claro que A é diagonalizavel para qualquer b.

   Em caso $a = c = 1$ temos que A não é diagonalizavel para qualquer b, pois multiplicação algebrica de $\lambda = 1$ é 3 mas $\dim V_1 = 2$.

   Em caso $a = 1, c \neq 1$ temos que A não é diagonalizavel para qualquer b, pois multiplicação algebrica de $\lambda = 1$ é 2 e $\dim V_1 = 1$ para qualquer b.

   Em caso $a \neq 1, c = 1$ temos que A é diagonalizavel para qualquer b, pois multiplicação algebrica de $\lambda = 1$ é 2 e $\dim V_1 = 2$ para qualquer b.

7. a) Não, pois $p_T(\lambda) = \lambda^4 - 1$ possui os raizes complexas.

   b) Não, pois multiplicidade algebrica de $\lambda = 0$ é 2 e multiplicidade geometrica de $\lambda = 0$ é 3.

   c) Sim. T tem três autovalores $\lambda = 0, 2, -2$ e multiplicidades algebricas deles são iguais a multiplicidades geometricas.

8. Temos que $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$ são autovalores de A e $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,1,0)$ são autovetores correspondentes. Assim A escreva-se como $A = S \cdot \text{diag}\{2,1,0\} \cdot S^{-1}$ com

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Portanto temos

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0^{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. a). Autovalores $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$, autovetores correspondentes $u_1 = (0,1,0)$, $u_2 = (-5,0,4)$, $u_3 = (-1,0,1)$. Assim A escreva-se como $A = S \cdot \text{diag}\{-5,0,4\} \cdot S^{-1}$ com

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   b). Autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$, autovetores correspondentes $u_1 = (4,0,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$, $u_3 = (2,1,1)$. Assim A escreva-se como $A = S \cdot \text{diag}\{-5,0,4\} \cdot S^{-1}$ com

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Autovalores $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2$, autovetores correspondentes $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 2, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1)$. Os autovetores u_1, u_2, u_3 formam uma base ortogonal em $\mathbb{R}^3$, nesta base a matrix da A é $(A)_B = \text{diag}\{3, -2, 2\}$. Tomando matriz M como

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que $M^{-1} = M^t$ e $M^t AM = \text{diag}\{3, -2, 2\}$.

11. a). Autovalores $\lambda_1 = 4(1 + \sqrt{3})$, $\lambda_2 = 4(1 - \sqrt{3})$, $\lambda_3 = -2$, autovetores correspondentes $u_1 = (4(1 + \sqrt{3}), 4 - 4\sqrt{3}, -2)$, $u_2 = (4(1 + \sqrt{3}), -4(\sqrt{3} - 1), -2)$, $u_3 = (-1, 0, 3)$. u_1, u_2, u_3 são l.i. assim eles formam uma base em $\mathbb{R}^3$. Mas eles não são ortogonais.

12. a) Sejam $v_n = \begin{pmatrix} L_n \\ L_{n+1} \end{pmatrix}$, $n = 0, \ldots, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Assim temos que $v_n = A^n \cdot v_0$. Por outra lado A pode ser escrito como

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_2 & -\varphi_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2 & -\varphi_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

com $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim

$$A^n = \begin{pmatrix} -\varphi_2 & -\varphi_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^n & 0 \\ 0 & \varphi_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 \\ -1 & -\varphi_2 \end{pmatrix}$$

Temos

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\varphi_2 & -\varphi_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^n & 0 \\ 0 & \varphi_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 \\ -1 & -\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^n + \varphi_2^n \\ \varphi_1^{n+1} + \varphi_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Portando $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

b) Faz na mesma maneira considerando $v_n = \begin{pmatrix} J_n \\ J_{n+1} \end{pmatrix}$, e $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Operadores auto-adjuntos.

1. Temos $(A + A^t)^t = A^t + A = A + A^t$ assim $A + A^t$ é simetrica.

   Temos $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$ assim AA^t é simetrica.

2. a) $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = 1$ — autovalores. $\tilde{u}_1 = (-1, 1)$, $\tilde{u}_2 = (1, 1)$ são autovetores correspondentes. Ortonormalizando deles obtemos $u_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $u_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ — uma base ortonormal de autovetores de A em $\mathbb{R}^2$.

   b) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$ — autovalores. $\tilde{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\tilde{u}_2 = (0, 1, 0)$, $\tilde{u}_3 = (-1, 0, 1)$ são autovetores correspondentes. Ortonormalizando deles obtemos $u_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $u_2 = (0, 1/\sqrt{2}, 0)$, $u_3 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ — uma base ortonormal de autovetores de A em $\mathbb{R}^3$.

   c) $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 1$ — autovalores. $\tilde{u}_1 = (5, 4, 3)$, $\tilde{u}_2 = (-5, 4, 3)$, $\tilde{u}_3 = (0, 3, 4)$ são autovetores correspondentes. Ortonormalizando deles obtemos $u_1 = (\frac{5}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{3}{\sqrt{50}})$, $u_2 = (-\frac{5}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{3}{\sqrt{50}})$, $u_3 = (0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ — uma base ortonormal de autovetores de A em $\mathbb{R}^3$.

3. É facil ver que $A(1,0,0) = \frac{2}{9}(5,-1,-1) + \frac{2}{9}(-1,5,-1) - \frac{1}{9}(-1,-1,5) = (1,1,-1)$, $A(0,1,0) = \frac{2}{9}(5,-1,-1) - \frac{1}{9}(-1,5,-1) + \frac{2}{9}(-1,-1,5) = (1,-1,1)$, $A(0,0,1) = -\frac{1}{9}(5,-1,-1) + \frac{2}{9}(-1,5,-1) + \frac{2}{9}(-1,-1,5) = (-1,1,1)$. Assim matriz do A tem forma

$$(A)_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Essa matriz é simetrica assim A é autoadjunto.

4. Seja matriz da A em base canonica dado por

$$(A)_{can} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Assim temos que

$$\begin{cases} a_{11} + a_{22} + a_{33} & = & 5 \\ 2a_{11} - a_{12} - 2a_{13} & = & 1 \\ 2a_{12} - a_{22} - 2a_{23} & = & -2 \\ 2a_{13} - a_{23} - 2a_{33} & = & 12 \\ 3a_{11} - 6a_{12} - 6a_{13} & = & 3 \\ 3a_{12} - 6a_{22} - 6a_{23} & = & 21 \\ 3a_{13} - 6a_{23} - 6a_{33} & = & 33 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$(A)_{can} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -3 & \frac{4}{3} & -\frac{19}{3} \\ 4 & -\frac{19}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

5. Se A é autoadjunto e $u \in \text{Ker}(A)$, $v \in \text{Im}(A)$ assim temos que

$$\langle u, v \rangle = \langle u, A(w) \rangle = \langle A(u), w \rangle = \langle 0, w \rangle = 0,$$

ou seja u, v são ortogonais e $\text{Ker}(A) = \text{Im}(A)^{\perp}$. Agora se $A^k(v) = 0$ e $k > 1$ assim $A^{k-1}(v) \in \text{Ker}(A)$ por outra lado é claro que $A^{k-1}(v) \in \text{Ker}(A)$ assim $A^{k-1}(v) = 0$. Pelo indução temos que $A(v) = 0$.

6. Para qualquerem dois vetores $v, u \in V$ temos

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\langle u+v, u+v \rangle - \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle)$$

Assim

$$\langle A(u), v \rangle = \frac{1}{2}(\langle A(u+v), u+v \rangle - \langle A(u), u \rangle - \langle A(v), v \rangle) =$$

$$= \frac{1}{2}(\langle B(u+v), u+v \rangle - \langle B(u), u \rangle - \langle B(v), v \rangle) = \langle B(u), v \rangle$$

Ou seja $A = B$.

7. Autovalores de A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$. Eles são positivos, assim A é positiva. Autovetores correspondentes são $u_1 = (1,1)$ e $u_2 = (-1,1)$. Assim temos

$$\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$$

8. Seja $B = I + (\sqrt{\alpha+1} - 1)P$. Claro que B é positivo (pois I e $(\sqrt{\alpha+1} - 1)P$ são positivos. Agora temos que

$$B^2 = \big(I+(\sqrt{\alpha+1}-1)P\big)\big(I+(\sqrt{\alpha+1}-1)P\big) = I+2(\sqrt{\alpha+1}-1)+(\sqrt{\alpha+1}-1)^2P = I+\alpha P$$

Assim B é raiz quadrada de $I + \alpha P$.