Lista 5

Autovalores e Autovetores.

1. Achar os autovalores e os autovetores operador T do $\mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (x+y, x-y)$.

2. Sejam A e B matrizes triangulares com a mesma diagonal principal $a_{ii} = b_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Prove que $p_\lambda(A) = p_\lambda(B)$.

3. Provar que se λ é autovalor de T, então λ^n é autovalor do T^n. Generalizando, se $p(t) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ é um polinômio então $p(\lambda)$ é valor próprio de $p(T)$, onde $p(T) = a_0 Id + a_1 T + \cdots + a_n T^n$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear com autovetores $v_1 = (1, -1)$, $v_2 = (1, 1)$ correspondendo respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2$. Seja $v = (5, 1)$. Calcule $T^{10}(v)$.

5. Seja A uma matriz inversível. Se λ é autovalor de A, mostre que $\lambda \neq 0$ e que $\frac{1}{\lambda} \neq 0$ é autovalor A^{-1}. Mostre que todo autovalor μ de A^{-1} tem a forma $\mu = \frac{1}{\lambda}$, onde λ é algum autovalor de A.

6. Achar os autovalores e os autovetores de operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por:

   a) $T(1,0,0) = (2,0,0)$, $T(0,1,0) = (2,1,2)$ e $T(0,0,1) = (3,2,1)$;

   b) $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,0,0)$ e $T(0,0,1) = (5,-1,2)$.

Diagonalização.

1. Em cada caso, ou mostre que a sentença é verdadeira ou dê exemplo mostrando que ela é falsa:

   a) Se A possui autovalores reais, então ela é diagonalizavel;

   b) Se A é diagonalizavel, então ela possui autovalores distintos;

   c) Se A é diagonalizavel, então sua transposta A^t também é diagonalizavel;

   d) Se A não tem inversa, então $\lambda = 0$ é autovalor de A;

   e) Se $A \sim B$, então $A^k \sim B^k$, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ($A \sim B$ se existir $S \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = SBS^{-1}$).

2. Sendo $B = \{(1,1,0), (1,0,0), (0,1,1)\}$ e $C = \{(0,1,0), (1,1,0), (1,0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$(T)_C^B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Encontre os autovetores e autovalores T. É T diagonalizavel?

3. Mostre que $A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. não é diagonalizavel a menos que $c = 0$.

4. a) $A^2 = A$ e λ é autovalor de A, mostre que $\lambda = 0, 1$.

   b) Se A é diagonalizavel e todos autovalores são 0 ou 1, mostre que $A^2 = A$.

5. a) Se $A^{-1} = A$ e λ é autovalor de A, mostre que $\lambda = \pm 1$.

b) Se A é diagonalizavel e todos autovalores são -1 ou 1, mostre que $A^{-1} = A$.

6. Considere a matriz real
$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Determine todos os valores de a, b e c para os quais A é diagonalizavel.

7. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear com polinômio característico indicado por $p_T(\lambda)$. Verifique se T é diagonalizavel em cada um dos seguintes casos:

   a) $p_T(\lambda) = \lambda^4 - 1$
   b) $p_T(\lambda) = \lambda^3(\lambda + 1)$ e $\dim \text{Ker}(T) = 2$.
   c) $p_T(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$ e $\dim \text{Ker}(T) = 2$.

8. Considere a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calcule A^{20}. Ache matrizes D e S tais que D é diagonal e $S^{-1}AP = D$.

9. Em cada caso, encontre o polinômio caracteristico, autovalores e autovetores e, se possível, encontre uma matriz inversível S tal que $S^{-1}AS$ é diagonal

   a). $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. b). $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

10. Seja A o operador linear cuja matriz relativa á base canônica é
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Achar os autovalores de A. Achar uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ em relação à qual matriz A é diagonal. Achar uma matriz M tal que $M^{-1} = M^t$ tal que M^tAM é a matriz diagonal.

11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (4x+4y+2z, 6x+2z, 12x+4y+2z)$. Ache uma base de $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual mostre que não existe uma base ortogonal formada de autovetores de T.

12. Busca a formula geral para os numeros:

   a) $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ — Numeros de Lucas.
   b) $J_0 = 1$, $J_1 = 2$, $J_n = 2J_{n-1} + 3J_{n-2}$.
   c*) $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ — Tribonacci numeros.

Operadores auto-adjuntos.

1. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz. Mostre que os matrizes $A + A^t, AA^t, A^tA$ são simmetricais.

2. Busca as bases orthonormais de V de autovetores de A:

   a) $V = \mathbb{R}^2$,
   $$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

   b) $V = \mathbb{R}^3$,
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) $V = \mathbb{R}^3$,
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Dados vetores $u = (4, 4, -2)$, $v = (4, -2, 4)$, $w = (1, -2, -2)$, seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $A(u) = (10, -2, -2)$ $A(v) = (-2, 10, -2)$, $A(w) = (1, 1, -5)$. Prove que A é auto-adjunto.

4. Dados vetores $u = (2, -1, -2)$, $v = (3, -6, -6)$ determine o operador auto-adjunto $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $A(u) = (1, 1, 13)$ $A(v) = (3, 21, 33)$, sabendo que o traço (=soma de todos autovalores) de A é 5.

5. Seja A auto-adjunto. Prove que $A^k(v) = 0$ implica que $A(v) = 0$.

6. Sejam $A, B : V \to V$ operadores auto-adjuntos tais que $\langle A(v), v\rangle = \langle B(v), v\rangle$ para todo vetor $v \in V$. Prove que $A = B$.

7. Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ é positiva. Busca raiz quadrada de A.

8. Sejam P uma projeção ortogonal e $\alpha > 0$.
   Exprima a raiz quadrada positiva de $I + \alpha P$ em termos de P.