Lista 5

Transformações lineares.

1. Decida se as seguintes transformações $T : V \to W$ são lineares

   a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $T(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   b) $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$, onde $T(p(t)) = p(t+1)$ para todo polinômio $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$;

   c) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, onde $T(A) = \text{traço}(A)$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;

   d) $T : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, onde $T(A) = \text{posto}(A)$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$;

   e) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, onde $T(A) = \det(A)$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

2. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Em cada caso prove a afirmação ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa.

   a) Se $\dim V = 4$, $\dim W = 3$, então T é injetora;

   b) Se $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é uma base de V e $T(e_2) = 0 = T(e_4)$, então $\dim \text{Im}(T) \leq 2$;

   c) Se T for injetora, então $\dim V \leq \dim W$.

   d) Se $\dim V \geq \dim W$, então T é sobrejetora.

   e) Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ for sobrejetora, então $\dim \text{Ker}(T) = m - n$

3. Determinar bases para o núcleo e para a imagem das transformações lineares abaixo:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, 2x + y, 3x + y)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = y + 2x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = AX$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

   d) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, $T(p(t)) = p'(t)$, $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$.

   e) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, $T(p(t)) = p'(t) + p''(t)$, $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$.

   f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = AX + X$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T((1, 0, 0)) = (2, 3, 1)$, $T((1, 1, 0)) = (5, 2, 7)$, e $T((1, 1, 1)) = (-2, 0, 7)$. Encontre $T((x, y, z))$ para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. T é sobrejetora? T é injetora? T é bijetora?

5. Sejam E e O os subespaços constituídos pelos polinômios pares, $p(t)$ tal que $p(-t) = p(t)$ e ímpares $q(t)$ tal que $q(-t) = -q(t)$ de $P_n(\mathbb{R})$. Use o teorema da dimensão para mostrar que $\dim O + \dim E = n + 1$.

6. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$ tal que $T(1) = t$, $T(t+t^2) = 1$, $T(t-t^2) = t+t^3$. Determine $T(a+bt+ct^2)$.

7. Determinar uma aplicaçao linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{Im}(T) = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)], \quad \text{Ker}(T) = [(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0)].$$

8. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação linear definida por $F(0,1,0) = (1,1,2)$, $F(0,0,1) = (0,0,2)$, $F(1,0,0) = (1,2,0)$. Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais:

$$\mathrm{Ker}(F), \mathrm{Im}(F), \mathrm{Ker}(F) \cap \mathrm{Im}(F), \mathrm{Ker}(F) + \mathrm{Im}(F).$$

9. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se os espaços vetoriais U e V são isomorfos, justificando a resposta.

   a) $U = \mathbb{R}^2$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$
   b) $U = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $V = \{p \in P_4(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
   c) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$
   d) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

10. Sejam F, G operadores lineares em $\mathbb{R}^3$ tais que $F(x,y,z) = (x, 2y, y - z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e tais que matriz do operador $2F - G$ em relação á base $B = \{(0,1,0), (1,1,0), (0,0,1)\}$ seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   ache a matriz que representa o operador $F^2 + G^2$ com respeito ás bases B e $C = \{(1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}$.

11. Determine a ação de $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dada a matriz

$$(T)^B_D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   B base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ e $D = \{(1,1), (1,0)\}$.

12. Mostre que $T : P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$, $T(at + b) = (b - a) - at$ é isomorfismo e dê uma fórmula para a ação de T^{-1}.

13. Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ definido por $T(p(t)) = p(t) + tp'(t)$, onde p' indica a derivada de $p(t)$. Mostre que T é um isomorfismo considerando a matriz $(T)_B$, onde $B = \{1, t, \ldots, t^n\}$.

14. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ transformação linear definida por

$$T(p) = \int_{-1}^{1} p(t)dt, \quad p \in P_2(\mathbb{R}).$$

   Determine a matriz de T em relação as seguintes bases.

   a) $B = \{1, t, t^2\}, C = \{1\}$.
   b) $B = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2\}, C = \{-2\}$.

15. Mostre que $T, R, S \in L(\mathbb{R}^2)$, dados por $T(x,y) = (x, 2y)$, $R(x,y) = (x, x + y)$, $S(x,y) = (0, x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ formam um subconjunto *l.i.* em $L(\mathbb{R}^2)$.