Lista 4

Espaços com produto interno.

1. Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$. Sendo $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 1)$ em $\mathbb{R}^2$ determine um vetor w desse espaço tal que $\langle u, w\rangle = -1$ e $\langle u, v\rangle = -1$.

2. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano tais que $\|v\| = 1$, $\|u\| = 1$ e $\|u - v\| = 2$. Determinar $\langle u, v\rangle$.

3. Num espaço vetorial euclidiano provar que $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow \langle u + v, u - v\rangle = 0$.

4. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Mostrar que $\langle u, v\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$. Determinar a norma de $u = (1, 2)$ em relação ao produto interno usual e também em relação ao produto definido nesse exercío.

5. Em cada um dos itens abaixo determinar $d(u, v)$.

   a) $V = \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (0, 0, 1, 1)$.

   b) $V = P_2(\mathbb{R})$, com o produto interno usual, $u = 1 + t$, $v = \frac{3}{4}t + 3t^2$.

   c) $V = M_3(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle A, B\rangle =$ traço(A^tB),

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Considere em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno dado por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$.
   Seja $S = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$. Determine uma base ortogonal de S. Dado $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$, encontre vetores $p_1(t) \in S$ e $p_2(t) \in S^\perp$ tais que $p(t) = p_1(t) + p_2(t)$.

7. Sejam u e v vetores fixos de um espaço vetorial euclidiano. Achar o vetor de menor norma de conjunto $\{u + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$, supondo $v \neq 0$.

8. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + tx_2y_2$ é um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.

9. Sendo $V = M_2(\mathbb{R})$, mostre que $\langle A, B\rangle =$ traço(B^tA) define um produto interno sobre V. Calcule $\langle A, B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ se
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Se $W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \mid x + y - z = 0 \right\}$, determine uma base ortonormal para W.

10. Consideremos em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno dado por
$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_2^1 f(t)g(t)dt$$
    Nessas condições, para que valor de m temos que $f(t) = mt^2 - 1$ é ortogonal a $g(t) = t$?

11. Ortonormalizar a base $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1)$ do $\mathbb{R}^3$ pelo processo de Gram-Schmidt.

12. Determinar a projeção ortogonal de $u = (1, 1)$ sobre o sub-espaço $V = [(1, 3)]$ do $\mathbb{R}^2$.

13. Determinar a projeção ortogonal de $f(t) = 2t - 1 \in P_2(\mathbb{R})$ sobre o sub-espaço $U = [t]$, em relação ao produto interno usual.

14. Em $P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno usual, ortonormalizar a base $\{1, 1 + t, 2t^2\}$. Achar o complemento orthogonal do subespaço $W = [5, 1 + t]$.

15. Determinar a projeção ortogonal do vetor $(1, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$ sobre o subespaço

$$W = \{(x, y, z, t) \mid x - y - z = 0, z - 2t = 0\}.$$

16. Mostre que $\{1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x), \dots\}$ é um conjunto ortogonal em $C[0, \pi]$ usando o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$.

17. Determinar uma isometria em $P_2(\mathbb{R})$ cuja matriz em relação a base canônica é

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

(onde $x, y, z \in \mathbb{R}$ devem ser determinados).

18. Verifique se $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = A^t$, $A \in M_2(\mathbb{R})$, é uma isometria.