Lista 4

Espaços afins. Variedades afins. Posição relativa.

1. Em cada caso busca as coordenadas afins das pontos B_1, B_2, B_3 em uma sistema das coordenadas afins $\Sigma = (\mathcal{O}, \beta)$ de um espaço afim $\mathcal{U}$ associado com espaço vetorial V:

   (a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{O} = (4,5)$, $\beta = \{(-1,2),(3,4)\}$, $B_1 = (0,0), B_2 = (1,1), B_3 = (80,90)$.

   (b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{O} = (-2,3,4)$, $\beta = \{(-1,2,0),(0,1,2),(1,1,1)\}$, $B_1 = (1,2,3), B_2 = (3,4,5), B_3 = (50,60,0)$.

   (c) $V = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O} = (1,2,\ldots,n)$, β é base canonica em $\mathbb{R}^n$. $B_1 = (n,1,2,\ldots,n-1), B_2 = (0,0,\ldots,0), B_3 = (n,n-1,\ldots,1)$.

   (d) $V = M_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, β é base canonica em $M_2(\mathbb{R})$.

   $$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   .

   (e) $V = P_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{O} = 1 - t^2$, $\beta = \{1, 1+t, 1+t+t^2, t^3\}$

   $$B_1 = 1 + 2t + t^3, B_2 = 2 - 3t + t^2 - t^3, B_3 = t.$$

2. Prove que se P é uma variedade afim que contem o vetor nulo do seu subespaço diretor, $S(P)$, então P coincide com $S(P)$.

3. Dado um subconjunto K de um espaço afim U existe uma variedade afim minimal P que contém K. (Considere $P = \cap_{K \subset P_i} P_i$).

4. Prove que o conjunto solução de um sistema linear compatível é uma variedade afim cujo subespaço diretor é o conjunto solução do sistema linear homogêneo associado.

5. Se r e s são duas retas contidas em um espaço afim de dimensão 2, prove que r e s são paralelas ou r e s tem um único ponto em comum.

6. Prove que num espaço afim de dimensão 3, uma reta e um plano não paralelos têm um único ponto em comum.

7. Em cada caso busca as equações parametricais da variedade afim $\mathcal{P}$ passando o ponto A em um espaço afim U associado com espaço vetorial $V = [e_1, \ldots, e_n]$ e tem diresão $S = [f_1, \ldots, f_k]$:

   (a) $U = \mathbb{R}^2$, $A = (-3,4)$, $V = [(1,1),(-1,2)]$, $S = [(1,2)]$.

   (b) $V = \mathbb{R}^3$, $A = (-2,3,4)$, $V = [(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)]$, $S = [(1,2,3),(2,4,0)]$.

   (c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, β é base canonica em $M_2(\mathbb{R})$.

   $$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right].$$

   .

(d) $V = P_3(\mathbb{R})$, $A = 1 + 2t^2 + t^3$, $\beta = \{1, 2+t, 1+t+t^2, t^3\}$

$$S = [1 + 2t + t^3, 2 - 3t + t^2 - t^3].$$

8. Considere o espaço afim $\mathbb{R}^4$ associado ao espaço vetorial $\mathbb{R}^4$. Seja $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica em $\mathbb{R}^4$. Sejam $S_1 = [e_3 - e_4]$ e $S_2 = [e_1 - e_4, e_1 - e_3]$ subespaços de $\mathbb{R}^4$ Sejam $\mathcal{P}_1$ a variedade afim que passa por $A = (1, 0, 0, 1)$ e tem a direção de S_1, e $\mathcal{P}_2$ a variedade afim que passa por $B = (0, 1, 0, 0)$ e tem a direção de S_2. Dê equações paramétricas de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$. Qual é posição relativa de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$? Dê equações de variedade afim $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$, gerada por $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.

9. Dê um exemplo de um espaço afim de dimensão 4 no qual existem uma reta e um plano, não paralelos, que não têm ponto em comum.

10. Se r e s são duas retas concorrentes em um espaço afim U, prove que existe um único plano em U que contem r e s.

11. Se r é uma reta em um espaço afim U e A é um ponto em U que não está em r, prove que existe um único plano em U que contem A e r.

12. Sejam $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ duas variedades com subespaços diretores S_1 e S_2 respectivamente, em um espaço afim de dimensão finita, tais que
$$S_1 \oplus S_2 = V.$$
Prove que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ têm um único ponto comum.