

Lista 3. Gabatitos

Transformações lineares

- (a) Não, pois $T(\lambda x) = |\lambda| \cdot |x| \neq \lambda|x|$ para $\lambda < 0$.

(b) Sim, pelo definição.

(c) Sim.

(d) Sim.

(e) Não, pois $\text{posto}(-1 + 1) = 0 \neq \text{posto}(-1) + \text{posto}(1) = 2$.

(f) Não.
- (a) Não, pois para $T(x, y, z, t) = T(x, y, z)$ nucleo tem forma $\text{Ker}(T) = \{(0, 0, 0, t), t \in \mathbb{R}\}$, assim T não é injetora.

(b) Sim, pois $\dim(V) = \dim \text{Im}(T) + \dim \text{Ker}(T)$. Assim $\dim \text{Im}(T) = 4 - \dim \text{Ker}(T) \leq 2$

(c) Sim. Pois $0 = \dim \text{Ker}(T) = \dim(V) - \dim \text{Im}(T) \geq \dim(V) - \dim(W)$.

(d) Não. Por exemplo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $T(x, y) = 0$.

(e) Sim, veja (b).
- (a) Desde que $\text{Ker}(T) = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$, o vetor $(0, 0, 1)$ é base do $\text{Ker}(T)$. Então vetores $T(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$ e $T(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$ formam base do $\text{Im}(T)$.

(b) Veja (a).

(c) Desde que $\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ x & y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$, base do nucleo consiste dos vetores $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Então $\text{Im}(T) = \left[T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$.

(d) Veja (e).

(e) Desde que $\text{Ker}(T) = \{at + b, a, b \in \mathbb{R}\}$, $\text{Im}(T) = [T(t^2) = 2t]$.

(f) Veja (c).
- Usando linearidade do T , obtemos $T(0, 1, 0) = (5, 2, 7) - (2, 3, 1) = (3, -1, 6)$ e $T(0, 0, 1) = (-2, 0, 7) - (5, 2, 7) = (-7, -2, 0)$. Então $T(x, y, z) = x(2, 3, 1) + y(3, -1, 6) + z(-7, -2, 0) = (2x + 3y - 7z, 3x - y - 2z, x + 6y)$. $\text{Ker}(T) = \{0\}$ assim T é bijetora.
- Definimos o operador $T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(p(t)) = p(t) + p(-t)$. Então $\text{Ker}(T) = [t, t^3, \dots, t^{2k+1}]$, $k \leq n$ e $\text{Im}(T) = [T(1), T(t^2), \dots, T(t^{2k})]$, $k \leq n$. Enfim $\text{Ker}(T) = O$ e $\text{Im}(T) = E$. Por teorema da dimensão, $\dim O + \dim E = n + 1$.
- Por linearidade do T , $T(t) = (T(t+t^2) + T(t-t^2))/2 = (1+t+t^3)/2$ e $T(t^2) = (1-t-t^3)/2$. Então $T(a+bt+ct^2) = at + b(1+t+t^3)/2 + c(1-t-t^3)/2 = (b+c) + (a+b/2-c/2)t + (b/2-c/2)t^3$.
- Complementamos o base do nucleo com elementos $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0, 0)$. Sejam $T(1, 0, 0, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $T(1, 1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0)$, $T(1, 1, 1, 0, 0) = (1, 1, 1)$. Assim obtemos $T(x, y, z, t, w) = (x - y + z - t, y - t, z - t)$.
- A matriz da transformação tem forma $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Veja que $\det(F) \neq 0$, então $\text{Ker}(F) = \{0\} = \text{Im}(F) \cap \text{Ker}(F)$ e $\text{Im}(F) = \mathbb{R}^3 = \text{Ker}(F) + \text{Im}(F)$.

9. (a) È facil ver que $T(x, y) = (x, y, 0)$ é isomorfismo.
 (b) Os espaços não são isomorfos por que $\dim(U) = 6$ e $\dim(V) = 3$.
 (c) È facil ver que $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ é isomorfismo.
 (d) Os espaços são isomorfos por que $\dim(U) = \dim(V) = 1$.
10. Sejam $b_1 = (0, 1, 0)$, $b_2 = (1, 1, 0)$, $b_3 = (0, 0, 1)$ os vetores em base B Escrevemos F em base B . Temos $F(b_1) = (0, 2, 1) = 2b_1 + b_3$, $F(b_2) = (1, 2, 1) = b_1 + b_2 + b_3$, $F(b_3) = (0, 0, 1) = b_3$. Assim

$$(F)_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e temos que } (G)_B = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vetor $(x, y, z) = x(b_2 - b_1) + yb_1 + zb_3 = (y - x)b_1 + xb_2 + zb_3 + 3$ em base B . Assim temos

$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y - x \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y - 2x \\ x \\ y - x + z \end{pmatrix}_B.$$

Assim $G(x, y, z) = (x, 3y - x, y - x + z)$ e $G^2(x, y, z) = (x, 9y - 4x, 4y - 3x + z)$.

Também temos que $F^2(x, y, z) = (x, 4y, y + z)$. Então $(F^2 + G^2)(x, y, z) = (2x, 13y - 4x, 5y - 3x + 2z)$. Temos agora que $(F^2 + G^2)(b_1) = (0, 13, 5) = 8c_2 + c_3$, $(F^2 + G^2)(b_2) = (2, 9, 2) = 2c_1 + 9c_2$, $(F^2 + G^2)(b_3) = (0, 0, 2) = -2c_2 + 2c_3$.

Assim temos nos $(F^2 + G^2)_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Temos que $T(1) = 1 \cdot (1, 1) + 2 \cdot (1, 0) = (3, 1)$, $T(t) = -1 \cdot (1, 1) + 0 \cdot (1, 0) = (-1, -1)$
 $T(t^2) = 0 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (1, 0) = (1, 0)$ Assim $T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_0T(1) + a_1T(t) + a_2T(t^2) = a_0(3, 1) + a_1(-1, -1) + a_2(1, 0) = (3a_0 - a_1 + a_2, a_0 - a_1)$.

12. Temos que $p(t)at + b \in \text{Ker}(T)$ se $b - a = 0$ e $a = 0$ ou seja se e só se $p(t) = 0$. Assim T é isomorfismo.

Se $T^{-1}(at + b) = xt + y$. Assim $T(xt + y) = (at + b) = -xt + (y - x)$. Temos

$$\begin{cases} a = -x \\ b = y - x \end{cases}$$

ou seja $x = -a$ e $y = b - a$. Assim $T^{-1}(at + b) = -at + (b - a)$.

13. Temos $T(1) = 1$, $T(t) = 2t, \dots, T(t^i) = t^i + t \cdot i \cdot t^{i-1} = t^i(1 + i), \dots, T(t^n) = t^n(n + 1)$. Assim temos que

$$(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n + 1 \end{pmatrix}$$

Temos que $\det(T) = (n + 1)! \neq 0$ assim T é invertível, ou seja T é um isomorfismo.

14. a) Temos que $T(1) = \int_{-1}^1 1 dt = 2$, $T(t) = \int_{-1}^1 t dt = 0$, $T(t^2) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$. Assim obtemos

$$(T)_C^B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

b) Temos que $T(1) = \int_{-1}^1 1 dt = 2$, $T(1+t) = \int_{-1}^1 (t+1) dt = 2$, $T(1+t+t^2) = \int_{-1}^1 1+t+t^2 dt = 2 + \frac{2}{3}$. Assim obtemos

$$(T)_C^B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

15. Se $\lambda_1 T + \lambda_2 R + \lambda_3 S = 0$ assim temos que

$$\lambda_1 T(x, y) + \lambda_2 R(x, y) + \lambda_3 S(x, y) = 0$$

ou

$$\lambda_1(x, 2y) + \lambda_2(x, x+y) + \lambda_3(0, x) = 0$$

para todos vetores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim tomando $(x, y) = (1, 0)$ temos

$$\lambda_1(1, 0) + \lambda_2(1, 1) + \lambda_3(0, 1) = 0$$

ou $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3$. Agora tomando $(x, y) = (1, 1)$ obtemos

$$\lambda_1(1, 2) - \lambda_1(1, 2) + \lambda_1(1, 1) = 0$$

ou seja $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, assim T, R, S são l.i.