

Lista 3

Transformações lineares.

- Decida se as seguintes transformações $T : V \rightarrow W$ são lineares
 - $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $T(x) = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
 - $T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$, onde $T(p(t)) = p(t+1)$ para todo polinômio $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$;
 - $T : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $T(A) = \text{traço}(A)$, $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$;
 - $T : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $T(A) = \text{posto}(A)$, $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$;
 - $T : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $T(A) = \det(A)$, $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.
- Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Em cada caso prove a afirmação ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa.
 - Se $\dim V = 4$, $\dim W = 3$, então T é injetora;
 - Se $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é uma base de V e $T(e_2) = 0 = T(e_4)$, então $\dim \text{Im}(T) \leq 2$;
 - Se T for injetora, então $\dim V \leq \dim W$.
 - Se $\dim V \geq \dim W$, então T é sobrejetora.
 - Se $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for sobrejetora, então $\dim \text{Ker}(T) = m - n$
- Determinar bases para o núcleo e para a imagem das transformações lineares abaixo:
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, 2x + y, 3x + y)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
 - $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = y + 2x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = AX$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
 - $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, $T(p(t)) = p'(t)$, $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$.
 - $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$, $T(p(t)) = p'(t) + p''(t)$, $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$.
 - $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = AX + X$, $X \in M_2(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
- Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T((1, 0, 0)) = (2, 3, 1)$, $T((1, 1, 0)) = (5, 2, 7)$, e $T((1, 1, 1)) = (-2, 0, 7)$. Encontre $T((x, y, z))$ para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. T é sobrejetora? T é injetora? T é bijetora?
- Sejam E e O os subespaços constituídos pelos polinômios pares, $p(t)$ tal que $p(-t) = p(t)$ e ímpares $q(t)$ tal que $q(-t) = -q(t)$ de $P_n(\mathbb{R})$. Use o teorema da dimensão para mostrar que $\dim O + \dim E = n + 1$.
- Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_4(\mathbb{R})$ tal que $T(1) = t$, $T(t+t^2) = 1$, $T(t-t^2) = t+t^3$. Determine $T(a+bt+ct^2)$.
- Determinar uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{Im}(T) = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)], \quad \text{Ker}(T) = [(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0)].$$

8. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformação linear definida por $F(0, 1, 0) = (1, 1, 2)$, $F(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$, $F(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$. Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais:

$$\text{Ker}(F), \text{Im}(F), \text{Ker}(F) \cap \text{Im}(F), \text{Ker}(F) + \text{Im}(F).$$

9. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se os espaços vetoriais U e V são isomorfos, justificando a resposta.

a) $U = \mathbb{R}^2, V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

b) $U = M_{2 \times 3}(\mathbb{R}), V = \{p \in P_4(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}.$

c) $U = \mathbb{R}^3, V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$

d) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}, V = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}.$

10. Sejam F, G operadores lineares em $\mathbb{R}^3$ tais que $F(x, y, z) = (x, 2y, y - z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e tais que matriz do operador $2F - G$ em relação á base $B = \{(0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

ache a matriz que representa o operador $F^2 + G^2$ com respeito ás bases B e $C = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}.$

11. Determine a ação de $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada a matriz

$$(T)_D^B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

B base canônica de $P_2(\mathbb{R})$ e $D = \{(1, 1), (1, 0)\}.$

12. Mostre que $T : P_1(\mathbb{R}) \rightarrow P_1(\mathbb{R}), T(at + b) = (b - a) - at$ é isomorfismo e dê uma fórmula para a ação de $T^{-1}.$

13. Seja $T : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ definido por $T(p(t)) = p(t) + tp'(t)$, onde p' indica a derivada de $p(t)$. Mostre que T é um isomorfismo considerando a matriz $(T)_B$, onde $B = \{1, t, \dots, t^n\}.$

14. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ transformação linear definida por

$$T(p) = \int_{-1}^1 p(t)dt, \quad p \in P_2(\mathbb{R}).$$

Determine a matriz de T em relação as seguintes bases.

a) $B = \{1, t, t^2\}, C = \{1\}.$

b) $B = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2\}, C = \{-2\}.$

15. Mostre que $T, R, S \in L(\mathbb{R}^2)$, dados por $T(x, y) = (x, 2y)$, $R(x, y) = (x, x + y)$, $S(x, y) = (0, x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ formam um subconjunto l.i. em $L(\mathbb{R}^2).$