Lista 3

Produto vetorial e produto escalar

1. Verdadeiro ou falso?
   - A medida angular entre um vetor não-nulo e ele mesmo é 0.
   - Medida angular entre dois vetores não-nulos é $\frac{\pi}{2}$ radianos.
   - A medida angular entre dois vetores de sentido contrário é 180 graus.
   - Não existem $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u}$ tais que angulo entre esses vetores é $arcsen(-1/2)$.
2. Calcule o cosseno do ângulo formado entre os vetores $(1, 4, -1)$ e $(0, 2, 3)$.
3. Determine m para que os vetores $(2, m, -3)$ e $(2, 2, m)$ fiquem ortogonais.
4. São dados $\overrightarrow{u} = (2, 1, -3)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 2, 1)$.
   - Se $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$, determina λ para que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ sejam ortogonais.
   - Determine o cosseno do ângulo que $\overrightarrow{u}$ forma com $\overrightarrow{v}$.
5. Em cada caso decomponha $\overrightarrow{v}$ como some de dois vetores $\overrightarrow{p}$ e $\overrightarrow{q}$, de modo que $\overrightarrow{p}$ seja paralelo e $\overrightarrow{q}$ seja ortogonal a $\overrightarrow{u}$:
   (a) $\overrightarrow{v} = (-1, -3, 2)$ e $\overrightarrow{u} = (0, 1, 3)$.
   (b) $\overrightarrow{v} = (0, 1, 2)$ e $\overrightarrow{u} = (0, -1, -2)$.
   (c) $\overrightarrow{v} = (1, 2, -1)$ e $\overrightarrow{u} = (2, 1, 0)$.
6. Sendo $\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \times (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$, determine o ângulo dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, sabendo que $|\overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{v}| = \overrightarrow{w}| = 1$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} < 0$.
7. Dados $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$ e $v = (1, 3, -2)$, determine um vetor $\overrightarrow{a}$, ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, de módulo 3, que forma com $\overrightarrow{k}$ um ângulo obtuso.
8. Sendo $\overrightarrow{u} = (-1, -1, m)$, $\overrightarrow{v} = (7, 5, 1)$ e $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$, pede-se:
   (a) o valor de m para que a equação $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$ possa ter solução;
   (b) para o valor de m encontrado em (a), resolva a equação $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$, sabendo que $|\overrightarrow{w}| = \sqrt{14}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} < 0$.
9. Verdadeiro ou falso? Se verdadeiro, demonstre, se falso, dê ontra-exemplo:
   (a) se $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$, então $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$;
   (b) se $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$, então $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são paralelos;
   (c) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$ implica $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$.
10. Busca a área do paralelogramo formado pelos vetores $2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ e $7\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Equações da reta e plano

11. Dados os vérties $A = (1,0,1)$, $B = (-2,-1,0)$ e $C = (2,1,1)$ de um triângulo ABC, esreva equações paramétrias da mediana relativa ao vértice A.

12. Dados $A = (4,0,-3)$, $B = (2,-3,-2)$ e $C = (m,n,3)$,

    (a) esreva as equações da reta AB;

    (b) determine m e n para que C fica na reta AB.

13. Esreva as equações das retas que contêm as diagonais do paralelogramo de vérties $A = (1,-2,2)$, $B = (2,1,-1)$, $C = (1,-6,8)$ e $D = (2,-3,5)$.

14. Determine equações paramétrias da reta que passa por $(-2,0,1)$, cujo vetor diretos é ortogonal a $(1,-2,1)$ e que seja conorrente com
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{3}.$$

15. Esreva as equações da reta de vetor diretor $(1,1,0)$ e conorrente com as retas $x = 2y = 3z$ e $(x,y,z) = (4, 1-\lambda, \lambda)$.

16. Esreva uma equação do plano que passa pelos pontos $A = (2,2,-1)$, $B = (0,4,-2)$ e $C = (-1,3,3)$.

17. Determine k de modo que o ponto $(3,1,k)$ pertença ao plano determinado por $A = (1,1,2)$, $B = (3,0,2)$ e $C = (4,1,3)$.

18. Determine uma equação geral do plano que passa pelas retas
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+6}{13}$$
e
$$\frac{x-4}{9} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-7}{4}.$$

19. Esreva uma equação geral do plano passando pelo ponto $(1,2,1)$ e pela reta
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = z.$$

20. Esreva uma equação do plano perpendicular ao plano $x+y+z-1=0$, e paralelo à reta
$$x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$$
e passando por $P = (1,5,3)$.