Lista 2. Gabatitos

Espaços vetoriais. Subespaços

1. Se a condição $f(2) = 0$ é substituida por $f(2) = 1$, observe que com a regra usual para multiplicar tem-se $2f(2) = 2 \neq 1$ e portanto, $2f \notin S$.

2. (a) Não, pois $0 \otimes (1, 2) = (1, 0) \neq (0, 0)$.
   (b) Não
   (c) Ver (a)
   (d) Similar ao item (a)

3. (a) Sim
   (b) $(1, 1, 1) \in W$ mas $\sqrt{2}(1, 1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin W$
   (c) Observe que $0 \notin W$.
   (d) Sim
   (e) Sim
   (f) Repare que $p(t) = t^2 \in W$ e $-p(t) = -t^2 \notin W$.
   (g) Sim
   (h) Observe que W é subespaço se, e somente se, $c = 0$.
   (i) Sim. Dica: mostre primeiro que $W = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f(x) = 0, se\ 0 < x < 1\}$.

4. (a) $U + W = U = W = U \cap W$
   (b)
$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$
   (c) Ver (a)

5. (a) Observe que U, W são subespaços de V, $U \cap W = (0, 0)$ e para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tem-se
$$(a, b) = \lambda_1(1, -\frac{2}{3}) + \lambda_2(1, 1)$$
   onde
$$\lambda_1 = \frac{3}{5}(a - b)$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{5}(2a + 3b)$$
   (b) Similarmente U, W são subespaços de V, $U \cap W = 0$ e
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Observe que

$$U = \{at^3 + bt^2 + ct \mid a + b + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$
$$W = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

e além disso, $p(t) = t \in P_3(\mathbb{R})$ mas $p \notin U + W$.

(d) Note que U, W são subespaços de V, $U \cap W = 0$ e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Combinações lineares. Dependência linear

1. (a) Note que S é um conjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^2$, por tanto $[S] = \mathbb{R}^2$.
   (b) $[S] = \{(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$
   (c) Similar ao item (a), $[S] = P_3(\mathbb{R})$.
   (d) $[S] = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$
2. (a) $S = \{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
   (b) $S = \{1\}$
   (c) Separar por casos

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } A = 0$$
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } c = d = a = 0,\ b \neq 0$$
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } c = d = b = 0,\ a \neq 0$$
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ se } c = d = 0,\ a, b \neq 0$$

   Similarmente para os outros casos
3. (a) $U \cap W = 0$ e observe que $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \in U + W$, portanto $U + W = V$
   (b) $U = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$, $U \cap W = [(1, -1, -6)]$.
   Similar ao item (a) note que $(1, -1, 0), (1, 3, 0), (0, 4, 6) \in U + W$ é linearmente independente, portanto $U + W = V$.
   (c) $U \cap W = 0$, para $U + W$ note que

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

   e que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   são linearmente independentes.

(d) Note que

$$U = [t^3, t^2+1, t+1]$$
$$W = [t^3, t, 1]$$

Portanto

$$U + W = [t^3, t^2+1, t, 1] = P_3(\mathbb{R})$$

Agora seja $p(t) \in U \cap W$, logo existem $a, b, c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$at^3 + bt + c = p(t) = \lambda_1 t^3 + \lambda_2(t^2+1) + \lambda_3(t+1)$$

disso

$$a = \lambda_1$$
$$0 = \lambda_2$$
$$b = \lambda_3$$
$$c = \lambda_2 + \lambda_3$$

portanto

$$p(t) = at^3 + b(t+1), \text{ para alguns } a, b \in \mathbb{R}$$

daí

$$U \cap W = [t^3, t+1]$$

4. (a) l.i.
   (b) l.i.
   (c) l.i.
   (d) l.i.
   (e) l.i.
   (f) l.i. Considere uma combinação linear

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \cos(2x) + \lambda_3 \cos(3x) = 0$$

logo

$$0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\lambda_2$$

assim

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_3 \cos(3x) = 0$$
$$f'(x) = -\lambda_1 \sin(x) - 3\lambda_3 \sin(3x) = 0$$

disso tem-se

$$0 = f(0) = \lambda_1 + \lambda_3$$
$$0 = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\lambda_1 + 3\lambda_3$$

portanto

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0$$

   (g) l.i. Similar ao item anterior.

5. Sem perda de generalidade assuma que $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ com $n > m$, sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ os vetores linha de A, i.e.,

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Note-se que $v_1, v_2, \ldots, v_n \in k^m$ e $\dim(\mathbb{R}^m) = m < n$, então $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes.

Base. Dimensão

1. Suponha que é l.i. Observe que $a \neq 0$ e se considera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1(a,1,0) + \lambda_2(1,a,1) + \lambda_3(0,1,a) = (0,0,0)$$

tem-se

$$\lambda_1 a + \lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 a + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_2 + \lambda_3 a = 0$$

daí

$$\lambda_1 = \lambda_3$$
$$\lambda_2 = -\lambda_1 a$$

logo

$$2\lambda_1 + \lambda_2 a = 0$$

disso, tem-se

$$2\lambda_1 - \lambda_1 a^2 = 0$$

Agora observe que $a \neq \pm\sqrt{2}$ para que B seja l.i.

2. (a) Sim
   (b) Sim
   (c) Sim

3. (a) $\{(1,1,0,-3),(0,0,1,0)\}$
   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
   (c) $\{1, x\}$

4. (a) i. $U = [(1,0,-1),(0,1,-1)]$
   ii. $W = [(1,0,0),(0,1,0)]$
   iii. $U + W = [(1,0,0),(0,1,0),(0,1,-1)] = \mathbb{R}^3$
   iv. $U \cap W = [(1,-1,0)]$
   (b) i. $U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$

ii. $W = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

iii. $U + W = U$

iv. $U \cap W = W$

(c) i. $U = \mathbb{R} = [1]$

ii. $W = [t^2 - t]$

iii. $U + W = [t^2 - t, 1]$

iv. $U \cap W = \{0\}$

5. (a) $[u] = (-1, 8, 5)$

   (b) $[u] = (-3, 9, -1)$

   (c) $[u] = \left(-\frac{9}{11}, \frac{36}{11}, -\frac{2}{11}\right)$

6. (a) $[p(t)] = (10, 0, 1, 2)$

   (b) $[p(t)] = (10, -1, -1, 2)$

   (c) $[p(t)] = (-2, 10, -1, 2)$

7. (a) $[A] = (2, 5, -8, 7)$

   (b) $[A] = (-3, 13, -15, 7)$

8. Por exemplo, $\mathbb{R}^4 = [(1, 1, 1, 0), (1, 1, 2, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)]$

9. Note que

$$\{(0, 2, -1, 0, 1), (0, 0, 3, -1, 2), (0, 4, -5, 1, 0)\} \text{ é l.d.}$$

e

$$\{(0, 2, -1, 0, 1), (0, 0, 3, -1, 2)\} \text{ é l.i.}$$

Portanto $m = 6$.

10. Os subespaços de soluções são respectivamente

$$\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\left[\begin{pmatrix} 28 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -27 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$