Lista 2

Espaços vetoriais. Subespaços

1. Mostre que (com as regras usuais para somar funções e multiplicar funções por numeros reais) o conjunto S dos funções da reta na reta que se anulam no ponto 2 é um espaço vetorial. O que acontece se a condição $f(2) = 0$ é substituida por $f(2) = 1$?

2. Verifique se $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R})\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações de adição $\oplus$ e de multiplicação por escalares $\otimes$ dadas por:

   a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);\qquad \lambda \otimes (x, y) = (x, \lambda y)$
   b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1);\qquad \lambda \otimes (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$
   c) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_2, -x_2 + y1);\qquad \lambda \oplus (x, y) = (x, \lambda y)$
   d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 - 1);\qquad \lambda \otimes (x, y) = (\lambda x - \lambda + 1, \lambda y - \lambda + 1)$

3. Verifique se W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V nos seguintes casos

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$
   b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$
   c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A$ é inversivel$\}$
   d) $V = M_n(\mathbb{R})$, dada $B \in M_n(\mathbb{R})$, defina $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid BA = 0\}$.
   c) $V = M_n(\mathbb{R})$, $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$
   d) $V = P_3(\mathbb{R})$, $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$
   e) $V = P_3(\mathbb{R})$, $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1)\}$
   f) $V = C^2(\mathbb{R})$, $W = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid af'' + bf' + c = 0\}$
   g) $V = C(\mathbb{R})$, $W = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(x)^2 dx = 0\}$

4. Em cada item abaixo encontrar os subespaços $U + W$ e $U \cap W$, onde U, W são subespaços do espaço vetorial V indicado.

   a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$.
   b) $U = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$, $W = \left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R}\right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.
   c) $V = P_3(\mathbb{R}), U = \{p(t) \in V; p''(t) = 0\}, W = \{q(t) \in V; q''(t) = 0\}$.

5. Verifique em cada um dos itens abaixo se $V = U \oplus W$.

   a) $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$
   b) $V = M_3(\mathbb{R}), U = \left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$,
   $W = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \mid e, f, g, h, i \in \mathbb{R}\right\}$
   c) $V = P_3(\mathbb{R}), U = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1) = 0\}$,
   $W = \{q(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid q'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$
   d) $V = M_2(\mathbb{R}), U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}, W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$.

Combinações lineares. Dependência linear.

1. Para cada um dos subconjuntos S e V, onde V é o espaço vetorial indicado, encontrar o subespaço gerado por S, isto é, $[S]$.

   a) $S = \{(1,0), (2,-1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

   b) $S = \{(1,1,1), (2,2,0)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   c) $S = \{1, t, t^2, 1+t^3\}$, $V = P_3(R)$.

   d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

2. Em cada um dos itens abaixo encontrar um subconjunto S, finito, que gera o subespaço vetorial W do espaço vetorial V.

   a) $W = \{(x,y,z) \in V = \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$

   b) $W = \{p(t) \in V = P_3(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

   c) $W = \{X \in V = M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

3. Encontrar, em cada um dos itens abaixo, os subconjuntos S do espaço vetorial V que geram U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

   a) $U = [(1,0,0), (1,1,1)]$, $W = [(0,1,0), (0,0,1)]$, $V = \mathbb{R}^3$.

   b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, $W = [(1,3,0), (0,4,6)]$, $V = \mathbb{R}^3$.

   c) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$, $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

   d) $U = [t^3 + 4t^2 - t + 3, t^3 + 5t^2 + 5, 3t^3]$, $W = [t^3 + 4t, t - 1, 1]$, $V = P_3(\mathbb{R})$.

4. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o subconjunto S do espaço vetorial V é l.i. ou l.d.

   a) $S = \{(1,2), (-3,1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

   b) $S = \{1 + t - t^2, 2 + 5t - 9t^2\}$, $V = P_2(\mathbb{R})$.

   c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

   d) $S = \{(1,2,2,-3), (-1,4,-2,0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

   e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_3(\mathbb{R})$.

   f) $S = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x\}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

   g) $S = \{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}, x^3e^{2x}\}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

5. Uma matriz A não é quadrada, mostre que ou as linhas ou as colunas de A são l.d.

Base. Dimenção.

1. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o conjunto $B = \{(a,1,0),(1,a,1),(0,1,a)\}$ é uma base de $\mathbb{R}$?

2. Verificar em cada um dos casos se o subconjunto B do espaço vetorial V é uma base para V.

   a) $B = \{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}$, $V = P_3(\mathbb{R})$.

   b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

   c) $B = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

3. Encontrar em cada um dos itens abaixo uma base e a dimensção do subespaço W do espaço vetorial V.

   a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y=0, e\; x+2y+t=0\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

   b) $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

   c) $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $V = P_2(\mathbb{R})$.

4. Dados U, W subespaços do espaço vetorial V determinar:

   i) uma base e a dimensção de U;

   ii) uma base e a dimensção de W;

   ii) uma base e a dimensção de $U+W$;

   iv) uma base e a dimensção de $U \cap W$.

   nos seguintes casos

   a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$, $W = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   b) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$, $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$. $tr(A)$ é a some dos elementos da diagonal principal de A, chamado de *traço* de A.

   c) $U = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1) = 0\}$, $V = P_2(\mathbb{R})$.

5. Determinar as coordenadas de $u = (-1,8,5) \in \mathbb{R}^3$em relação as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$ abaixo;

   a) base canônica;

   b) $\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$;

   c) $\{(1,2,1),(0,3,2),(1,1,4)\}$.

6. Determinar as coordenadas de $p(t) \in P_3(\mathbb{R})$, dado por $p(t) = 10 + t^2 + 2t^3$, $t \in \mathbb{R}$ em relação as seguintes bases de $P_3(\mathbb{R})$;

   a) base canônica $\{1, t, t^2, t^3\}$;

   b) $\{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$;

   c) $\{4+t, 2, 2-t^2, t+t^3\}$.

7. Determinar as coordenadas do vetor $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ em relação as seguintes bases de $M_2(\mathbb{R})$;

a) base canônica;

b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

8. Determine uma base de R^4 que contenha os vetores $(1, 1, 1, 0)$ e $(1, 1, 2, 1)$.

9. Sejam $W = [(0, 2, -1, 0, 1), (0, 0, 3, -1, 2), (0, 4, -5, 1, 0)]$, e $v = (0, m, -m, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$. Determine uma base de W. Determine todos os valores de m para os quais $v \in W$.

10. Para os sistemas lineares a seguir, determine a dimensçao e uma base do subespaço das soluções:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 3y + 2z - w & = & 0, \\ x - 2y + 4z + 3w & = & 0, \\ x - 5y - 2z - 9w & = & 0. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x + 5y - 3z + 2w & = & 0, \\ x + 6y + 2z - 3w & = & 0, \\ x + 3y - 13z + 12w & = & 0. \end{array}\right.$$